ELSEVIER
Journal of Pure and Applied Algebra 158 (2001) 267–294
JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA
www.elsevier.com/locate/jpaa

Intersection de courbes planes et construction de courbes à singularités ordinaires

Thierry Mignon
ENS Lyon, UMPA, Lab of Mathematics, 46 Allee d'Italy, 69364 Lyon Cedex, France

Received 10 July 1999; received in revised form 23 October 1999
Communicated by A.V. Geramita

Abstract

In this article, we study the generic curve of the linear system E of plane curves of degree d passing through r generic points with at least prescribed multiplicities $m_1,\dots,m_r$. Assuming that the m_i are less than or equal to three and that the degree d is greater than 316 we prove that, if E is not empty, then its generic curve is geometrically irreducible, smooth away from the prescribed singularities and has only ordinary singularities. © 2001 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

MSC: 14H50

0. Introduction

Soient $d, m_1,\dots,m_r, r$ entiers positifs, et $P_1,\dots,P_r$ r points en position générale dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$. Soit E le système linéaire des courbes planes de degré d passant par chaque point P_i avec la multiplicité au moins m_i. La dimension attendue pour E est $e = \max(d(d+3)/2 - \sum_{i=1}^{r} m_i\ ;\ -1)$. Nous prouvons ici le résultat suivant:

Théorème 1. *Si $m_i \le 3$ pour tout i $(1 \le i \le r)$ et si $d \ge 317$, alors le système E a la dimension attendue; s'il est non vide, une courbe générale de E est irréductible, lisse en dehors des r points $P_1,\dots,P_r$, et possède en chacun de ces points une singularité ordinaire de la multiplicité prescrite.*

E-mail address: tmignon@umpa.ens-lyon.fr (T. Mignon).

PII: S0022-4049(00)00044-X

Le Théorème 1 est particulièrement intéressant pour les systèmes linéaires de dimension zéro. La courbe est alors isolée, et l'emploi du théorème de Bertini est impossible. La borne $d \geq 317$ provient uniquement des contraintes de la méthode employée (voir les constructions de la Section 5.3) et peut certainement être améliorée en reprenant la même démarche avec plus de précautions.

Une conjecture de A. Hirschowitz prévoit que si $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1$ et $d \geq m_1+m_2+m_3$, le système E a la dimension attendue (voir [11]) et, s'il est non vide, sa courbe générique est irréductible et lisse, à singularité ordinaire (sauf dans le cas d'un genre négatif ou d'une cubique multiple passant par 9 points). La borne conjecturale vaut donc ici 10.

Les travaux précédents ont surtout porté sur la question de la *dimension* des systèmes linéaires E. En 1960, Nagata [14] donnait la dimension de ces systèmes dans le cas où le nombre de points r est inférieur ou égal à 9. Les récents, et nombreux, progrès dans ce domaine ([1,5,6,13,17] entre autres) permettent d'aborder sérieusement la question de la lissité et de l'irréductibilité des courbes.

Pour ces questions, plusieurs résultats sont maintenant acquis, lorsque la dimension du système E est grande devant le degré des courbes (Voir [7,8]). Dans [8, Section 3.3], Greuel, Lossen et Shustin montrent l'existence d'une courbe irréductible à singularité ordinaire sous une condition impliquant $\dim E > d^2/4$. Dans ce cadre, il est permis de faire usage du théorème de Bertini. Pour des multiplicités bornées, le dernier résultat remonte à 1981: Dans [2], Arbarello et Cornalba montrent que la conjecture d'Hirschowitz est vraie pour des multiplicités valant 1 ou 2.

Signalons pour finir un résultat récent annoncé par A. Bruno (Tolède, octobre 1998): les variétés de courbes planes, irréductibles, de degré d fixé, ayant exactement r singularités ordinaires de multiplicité $m_1,\ldots,m_r$ en position générale sont irréductibles et lisses. Il reste à prouver que ces variétés sont non vides. C'est là l'objet du théorème 1, qui montre de surcroît que ces singularités peuvent être prises en position générique.

Présentation de la preuve

Avant tout, notons que l'essentiel du travail n'est pas fait sur le plan, mais sur la surface rationnelle obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2$ aux r points $P_1,\ldots,P_r$. Ceci permet un emploi agréable de la forme d'intersection, du théorème de Bertini, et une meilleure gestion des problèmes infinitésimaux.

Si x désigne le r-uplet $(P_1,\ldots,P_r)$, le plan $\mathbb{P}^2$ éclaté aux r-point est noté S_x. Il est d'usage de munir le groupe de Picard de S_x de la base formée de la transformée totale d'une droite du plan et de l'opposé des r diviseurs exceptionnels. Le système linéaire complet $\mathscr{L}_x$ de la classe $(d;m_1,\ldots,m_r)$ est isomorphe au système E défini plus haut.

Le lemme d'Horace géométrique. La preuve du théorème 1 se fonde sur un lemme démontré par l'auteur dans [12] (voir aussi [3] pour une première approche –non différentielle– de ce lemme). Nous appelons ce résultat “lemme d'Horace géométrique”. Il s'inspire de la méthode d'Horace de A. Hirschowitz (voir [1] par exemple). Mais tandis que la méthode d'Horace usuelle permet seulement de calculer la *dimension* de systèmes tels que $\mathscr{L}_x$, le lemme géométrique permet aussi de prouver que les sections de ce système sont *irréductibles* et *lisses*.

Ce lemme, exposé en Section 2.1, fonctionne sur le principe suivant: Choisissons une courbe plane intègre C, de degré c. Spécialisons quelques uns des r points sur C et notons $y=(Q_1,\dots,Q_r)$ le r-uplet des points en position spéciale. La spécialisation est faite en sorte que $\tilde{C}$ (transformée stricte de C sur S_y) soit une composante fixe du système linéaire $\mathscr{L}_y$ en position spéciale. Ainsi, une courbe dans $\mathscr{L}_y$ est l'union de $\tilde{C}$ et d'une courbe *résiduelle*.

Sous certaines conditions, précisées par le Lemme 2.1, si la courbe résiduelle générique est géométriquement irréductible et lisse, la courbe générique du système initial aura les mêmes propriétés.

Remarquons que, si l'on ne spécialise pas assez de points sur C, $\tilde{C}$ n'est pas une composante fixe de $\mathscr{L}_y$ et la méthode ne s'applique pas. En revanche, si l'on spécialise trop de points sur C, la dimension du système augmente lors de la spécialisation. Pour maîtriser ce phénomène, il faut considérer certains sous-systèmes de $\mathscr{L}_y$, où l'on impose aux courbes de passer par des points infiniment voisins des Q_i (voir l'énoncé 2.1, la remarque 2.2, et surtout [12]).

Monodromie de l'intersection des courbes. L'une des hypothèses essentielles du lemme d'Horace géométrique est la suivante: l'intersection de la courbe résiduelle générique $\mathfrak{D}'_y$ et de la courbe $\tilde{C}$ doit être transverse et irréductible. Expliquons cette condition.

Supposons, pour simplifier que la dimension de $\mathscr{L}_y$ vaille 0. Dans ce cas, la courbe générique $\mathfrak{D}'_y$ est isolée dans son système linéaire. Si elle rencontre $\tilde{C}$ transversalement, il existe un ouvert U de l'adhérence Y de y tel que, pour tout point fermé z dans cet ouvert, la courbe résiduelle $\mathfrak{D}'_z$ soit isolée et rencontre C transversalement. Lorsque z varie, l'intersection $\mathfrak{D}'_z \cap \tilde{C}$ forme une variété I, et le morphisme naturel $I \to U$ est un revêtement de degré dc.

La condition, énoncée au dessus du point non fermé y, signifie simplement que la variété I est irréductible. Autrement dit, le groupe de monodromie du revêtement $I \to U$ (ou du morphisme fini $\mathfrak{D}'_y \cap \tilde{C} \to y$) agit transitivement. Nous noterons $\mathfrak{G}_y$ ce groupe de monodromie.

Permutation des points. En réalité, la condition expliquée ci-dessus peut être affaiblie lorsque plusieurs multiplicités sont identiques (Ce sera toujours le cas ici puisque seuls les nombres 1, 2 et 3 apparaissent comme multiplicités). On peut alors définir un groupe $\mathfrak{H}_y$ qui agit sur la variété Y en permutant des points affectés des mêmes multiplicités. L'action de ce groupe se prolonge à toute la variété S_y, ainsi qu'aux courbes $\mathfrak{D}'_y$ et $\tilde{C}$.

Soient $\widehat{\mathfrak{D}'_y}$ et $\hat{\tilde{C}}$ les quotients de $\mathfrak{D}'_y$ et $\tilde{C}$ par $\mathfrak{H}_y$. Pour pouvoir appliquer le lemme d'Horace, il suffit en fait que le schéma $\widehat{\mathfrak{D}'_y} \cap \hat{\tilde{C}}$ soit irréductible. Si $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ désigne le groupe de monodromie du morphisme $\widehat{\mathfrak{D}'_y} \cap \hat{\tilde{C}} \to \hat{y}$, il suffit donc que $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ agisse transitivement.

On montre aisément que $\mathfrak{G}_y$ est un sous-groupe distingué de $\widehat{\mathfrak{G}_y}$. De plus, le groupe $\mathfrak{H}_y$ s'envoie surjectivement sur le quotient $\widehat{\mathfrak{G}_y}/\mathfrak{G}_y$; ainsi, en permutant des points par le groupe $\mathfrak{H}_y$, il est possible de montrer que $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ agit transitivement, même si ce n'est pas le cas pour $\mathfrak{G}_y$.

Répartition symétrique. Pour mettre en pratique cette remarque, nous introduisons la notion de répartition symétrique. Il s'agit d'une spécialisation du point y en un point z telle que la courbe résiduelle dégénère en $l+1$ courbes: $\mathfrak{D}'_z = H_1 \cup \cdots \cup H_l \cup R$. La courbe R ne rencontre pas $\tilde{C}$, tandis que les l courbes H_i ont une intersection irréductible avec $\tilde{C}$. On montre ainsi que l'action de $\mathfrak{G}_z$ possède l orbites. Par ailleurs, puisque le groupe $\mathfrak{H}_z$ agit sur $\mathfrak{D}'_z$, il en permute les composantes. On demande qu'il laisse R stable et agisse transitivement sur les H_i. Si une telle répartition existe, le groupe $\widehat{\mathfrak{G}_z}$ agit transitivement; mais ce groupe est un sous-groupe de $\widehat{G_y}$ (car y se spécialise en z). Donc $\widehat{G_y}$ agit aussi transitivement.

L'existence de répartition symétrique est prouvée en Section 3.9. Les répartitions nécessaires au théorème 1 sont construites à la fin de l'article.

Systèmes faiblement contraints. Pour appliquer le lemme d'Horace, il faut aussi étudier la courbe résiduelle générique. Pour cela, nous introduisons un type particulier de systèmes linéaires: les systèmes faiblement contraints. Ce sont des systèmes de courbes assignées à passer avec la multiplicité 1 par un grand nombre de points génériques sur C. Sous une condition simple de non spécialité, de tels systèmes se comportent souvent comme si les conditions imposées par ces points de C n'existaient pas.

On est alors en présence d'un système de grande dimension, et l'on peut appliquer le théorème de Bertini pour prouver que la courbe générique est irréductible et lisse. On peut aussi appliquer les techniques proposées par Harris [10] pour prouver que le groupe de monodromie de l'intersection de C et des courbes du système est le groupe symétrique tout entier.

La preuve. Nous appliquons le lemme d'Horace géométrique en choisissant, comme courbe C, une cubique plane rationnelle (courbe irréductible ayant un nœud pour seule singularité). Nous distinguons deux cas:

S'il y a suffisamment de points affectés de la multiplicité 2, il suffit d'appliquer une fois le lemme pour obtenir un système résiduel faiblement contraint; on conclut alors sans difficulté. Sinon, il faut utiliser deux fois le lemme d'Horace avant d'obtenir un système faiblement contraint. La première fois, il est nécessaire de construire des répartitions symétriques pour prouver que l'intersection des courbes (modulo le groupe $\mathfrak{H}$) est irréductible. Pour construire ces répartitions il faut que suffisemment de points soient affectés de la multiplicité 3. Ceci impose la condition $d \geq 317$.

Le choix de la cubique C est dicté par plusieurs critères. Il faut une courbe: rationnelle pour construire des répartitions symétriques (cf. Proposition 3.9); de degré assez grand pour pouvoir spécialiser un nombre élevé de points et obtenir un système faiblement contraint; de degré assez faible pour obtenir facilement un lemme d'annulation (cf. Proposition 5.1).

1. Familles de courbes sur les surfaces rationnelles

Dans cette partie, nous posons les principales notations de l'article, et décrivons la famille de surfaces rationnelles obtenue en éclatant une famille de r points distincts du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$. Nous construisons aussi les familles de courbes sur ces surfaces en exhibant un diviseur universel. Enfin, nous étudions dans quelle mesure ces constructions "passent au quotient" lorsqu'un groupe de permutation agit sur la famille des r points.

1.1. Familles de surfaces et diviseurs relatifs

Soit $r \geq 0$ et X l'ouvert de $(\mathbb{P}^2)^r$ des r-uplets de points distincts. Le morphisme $\mathbb{P}^2_X = \mathbb{P}^2 \times X \to X$ est muni de r sections naturelles:

$$\begin{aligned} \gamma_i: X \quad & \to \mathbb{P}^2 \times X, \\ (P_1, \dots, P_r) & \to (P_i, (P_1, \dots, P_r)). \end{aligned}$$

Soit Γ_i l'image de γ_i. L'union $\Gamma = \bigcup_{i=1}^r \Gamma_i$ est une variété lisse de $\mathbb{P}^2_X$. En éclatant $\mathbb{P}^2_X$ le long de Γ, on obtient une famille de surfaces rationnelles, paramétrées par X: $S_X \xrightarrow{b} \mathbb{P}^2_X \to X$. Nous noterons π le morphisme composé $S_X \to X$. Pour tout point $x = (P_1, \dots, P_r)$ de X, la fibre de π au dessus de x, notée S_x est simplement le plan éclaté aux r points $P_1, \dots, P_r$. Si x est le point générique de X, S_x est la *surface rationnelle générique* de nombre de Picard $r+1$.

Rappelons que l'on appelle diviseur de Cartier relatif de S_X sur X tout faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_D$ sur S_X, localement principal, et non diviseur de zéro dans toutes les fibres du morphisme π (voir [9, Section 4]). Ces faisceaux d'idéaux sont plats sur X.

Exemples. (1) Soit L une droite de $\mathbb{P}^2$, $L \times X \subset \mathbb{P}^2 \times X$ la famille de droites correspondante au dessus de X, et $H_X = b^{-1}(L \times X)$ la transformée totale de $L \times X$ dans S_X après éclatement. L'idéal $\mathscr{I}_{H_X}$ est un diviseur de Cartier relatif effectif de $S_X \to X$.

(2) Soit maintenant $E_{i,X}$ le diviseur exceptionnel issu de l'éclatement le long de Γ_i; l'idéal $\mathscr{I}_{E_{i,X}}$ est un diviseur de Cartier relatif effectif de $S_X \to X$.

1.2. Forme d'intersection et systèmes linéaires

Pour tout $x \in X$, le groupe de Picard de la surface S_x est muni de la base: $[H_x]$, $[-E_{1,x}], \dots, [-E_{r,x}]$ (où H_x (resp. $E_{i,x}$) est la fibre du diviseur H_X (resp. $E_{i,X}$) au dessus de x). Puisque les diviseurs de Cartier relatifs sont plats sur X, ils vérifient la propriété de conservation des nombres suivante:

Proposition 1.1. *Soit D un diviseur relatif effectif de $S_X \to X$ et, pour tout $x \in X$, soit $[D_x] \in \mathbb{Z}^{r+1}$ la classe du diviseur D_x dans la base définie ci-dessus; $[D_x]$ ne dépend pas de x.*

Le diviseur canonique de Pic S_x vaut $\underline{\omega} = (-3;(-1)^r)$ (la notation $(-1)^r$ désigne l'entier (-1) répété r fois. Nous conserverons cette convention dans la suite). La forme d'intersection de S_x s'écrit: $(d;m_1,\dots,m_r).(c;n_1,\dots,n_r) = dc - m_1n_1 - \cdots - m_rn_r$.

Fixons maintenant une classe $\underline{d} = (d;m_1,\dots,m_r) \in \operatorname{Pic} S_x$. Nous noterons $\mathcal{O}(\underline{d})$ le faisceau localement libre $\mathcal{O}(dH_x - \sum_{i=1}^r m_iE_{i,x})$. Le théorème de Riemann-Roch donne la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{O}(\underline{d})$: $\chi(\underline{d}) = ((d+1)(d+2))/2 - \sum_{i=1}^r (m_i(m_i+1))/2$. On peut aussi calculer le genre arithmétique des sections de $\mathcal{O}(\underline{d})$: $g(\underline{d})((d-1)(d-2))/2 - \sum_{i=1}^r (m_i(m_i-1))/2$.

Le système linéaire complet des sections de $\mathcal{O}(\underline{d})$, $\mathbb{P}(H^0(S_x,\mathcal{O}(\underline{d})))$, sera noté $\mathcal{L}_x(\underline{d})$. Si $d \geq -2$, le théorème de dualité de Serre montre que $h^2(S_x,\mathcal{O}(\underline{d}))$ est nul. La dimension attendue pour $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ vaut alors: $\max(\chi(\underline{d}) - 1, -1)$. (Par convention, le système vide est supposé de dimension -1).

Un système $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ est dit *régulier* s'il a la dimension attendue. Plus généralement, un faisceau $\mathcal{F}$ sur S_x est dit régulier si $h^0(S_x,\mathcal{F}) = \max(\chi(\mathcal{F}),0)$ et $h^1(S_x,\mathcal{F}) = \max(-\chi(\mathcal{F}),0)$.

1.3. Familles universelles de diviseurs relatifs

Considérons $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$; posons $m_i'=\max(m_i,0)$ et $\underline{d}'=(d;m_1',\dots,m_r')$. Soit Γ_i l'image de la i-ième section naturelle $\gamma_i : X \to \mathbb{P}^2_X$, définie plus haut, et soit $Z \subset \mathbb{P}^2_X$ le schéma d'idéal $\mathcal{I}_{\Gamma_1}^{m_1'} \dots \mathcal{I}_{\Gamma_r}^{m_r'}$. Z est une famille plate sur X dont les fibres, notées Z_x pour $x \in X$, sont des unions de r gros-points de multiplicités $m_1',\dots,m_r'$.

Si $x=(P_1,\dots,P_r) \in X$, le système linéaire $|\mathcal{I}_{Z_x}(d)|$ est le système des courbes planes de degré d passant avec la multiplicité au moins m_i' en chaque point P_i. Ce système est isomorphe à $\mathcal{L}_x(\underline{d})$.

Considérons maintenant $\mathbb{P}^{d(d+3)/2} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(d)))$ le système linéaire des courbes planes de degré d. On définit (ici, de manière ensembliste uniquement, mais il possède une structure de schéma naturelle) le sous-schéma $F = F(\underline{d})$ de $\mathbb{P}^{d(d+3)/2} \times X$ de la manière suivante:

$$F(\underline{d}) = \{(D,(P_1,\dots,P_r)) \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(d))) \times X \text{ tel que } \\ D \text{ est de multiplicité au moins } m_i' \text{ au point } P_i\ (1 \leq i \leq r).\}$$

Ce schéma F paramètre une famille canonique de courbe $\mathcal{D}' \subset \mathbb{P}^2 \times F$: si $x' = (D,(P_1,\dots,P_r))$, la fibre $\mathcal{D}'_{x'}$ est simplement la courbe D. Eclatons maintenant les r-points en familles dans $\mathbb{P}^2 \times F$, et notons $b_F : S_F \to \mathbb{P}^2_F$ cet éclatement. Par hypothèse, le diviseur $\mathcal{D} = b_F^{-1}(\mathcal{D}') - \sum_{i=1}^r m_iE_i$ est effectif. C'est un diviseur relatif effectif de la famille S_F sur F.

Proposition 1.2. *Soit $\underline{d} \in \mathbb{Z}^{r+1}$. Le foncteur $\mathbf{F}_{\underline{d}}$ de **Schéma**/**X** vers **Ens** tel que $\mathbf{F}_{\underline{d}}(Y)= \{\mathcal{G} \subset S_Y = S_X \times_X Y | \mathcal{G}$ est un diviseur relatif effectif de classe $\underline{d}$ sur $Y\}$ est représenté par le couple $(F,\mathcal{D})$.*

(Cette proposition est présentée plus en détail dans [12]; on pourra aussi consulter [9,15]).

Soit $p: F \to X$ la projection naturelle de $F \subset \mathbb{P}^{d(d+3)/2} \times X$ vers X. La fibre de p au dessus de $x \in X$ est simplement le système linéaire $\mathscr{L}_x(\underline{d})$. Soit x' le point générique de cette fibre. Par définition, la courbe $\mathscr{D}_{x'}$ est la courbe générique de $\mathscr{L}_x(\underline{d})$. Nous la noterons $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$.

Soit maintenant $y \in X$, tel que x se spécialise en y. Nous dirons que la courbe $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ *se spécialise en* $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ si le point générique y' de $p^{-1}(y)$ est une spécialisation de x'. Cette notion est primordiale si l'on souhaite obtenir des informations sur $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ à partir de $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$.

Si la dimension de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est égale à celle de $\mathscr{L}_x(\underline{d})$, on montre aisément que $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ se spécialise en $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$. En revanche, si la dimension de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est supérieure à celle de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$, il faut des conditions supplémentaires. Ces conditions peuvent être vérifiées en imposant au système de nouveaux points bases, infiniment voisins des r points de départ (voir [12, et le Lemme 2.1]).

1.4. Permutation des points

Soit $\mathfrak{S}_r$, le groupe de permutation des r-entiers $\{1,\dots,r\}$; $\mathfrak{S}_r$ agit sur $X \subset (\mathbb{P}^2)^r$ en permutant les points du plan. Nous noterons $\bar{X}$ le quotient de X par $\mathfrak{S}_r$. L'action de $\mathfrak{S}_r$ se prolonge naturellement à $\mathbb{P}^2_X$ tout entier. De plus, si Γ désigne la famille des r points (voir le paragraphe 1.1), on observe que $\mathfrak{S}_r(\Gamma) = \Gamma$. Donc $\mathfrak{S}_r$ agit aussi sur l'éclatement de $\mathbb{P}^2_X$ le long de Γ. Nous noterons $S_{\bar{X}}$ le quotient de S_X par $\mathfrak{S}_r$.

Soit maintenant $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$. Nous dirons que $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ laisse $\underline{d}$ invariant si $(d;m_1,\dots,m_r) = (d;m_{\sigma(1)},\dots,m_{\sigma(r)})$. Notons $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'(\underline{d}) \subset \mathfrak{S}_r$ le stabilisateur de $\underline{d}$ par $\mathfrak{S}_r$. On vérifie aisément que l'action de $\mathfrak{H}'$ sur X se prolonge en une action sur le schéma $F = F(\underline{d})$ défini dans la section précédente. De même, l'action de $\mathfrak{H}'$ est bien définie sur $\mathbb{P}^2_F$ et se prolonge au schéma S_F tout entier. Enfin, $\mathfrak{H}'$ agit aussi sur la courbe universelle $\mathscr{D}$.

Soient maintenant y, un point de X, et Y l'adhérence de y dans X. On note $\bar{y}$ (resp. $\bar{Y}$) l'image de y (resp. Y) dans $\bar{X}$ par le morphisme quotient de $\mathfrak{S}_r$. Soit $\mathfrak{H}''_y$ le groupe de monodromie du revêtement $Y \to \bar{Y}$. C'est un sous-groupe bien défini de $\mathfrak{S}_r$ (voir Section 3.1, Proposition 3.3); il agit sur X en laissant y invariant. Il agit donc sur la variété Y tout entière.

Pour tout couple $(y,\underline{d})$, $y \in X$ et $\underline{d} \in \operatorname{Pic} S_y$, nous poserons:

$$\mathfrak{H}_y(\underline{d}) := \mathfrak{H}'(\underline{d}) \cap \mathfrak{H}''_y \subset \mathfrak{S}_r.$$

Le groupe $\mathfrak{H}_y(\underline{d})$ sera simplement noté $\mathfrak{H}$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Soit y' le point générique de la fibre $p^{-1}(y)$, où $p: F(\underline{d}) \to X$, et soit Y' l'adhérence de y' dans F. Le groupe $\mathfrak{H}$ agit sur Y et S_Y, mais aussi sur les variétés Y', $S_{Y'}$ et sur le diviseur universel $\mathscr{D}_{Y'}$ au dessus de Y'. En particulier, $\mathfrak{H}$ agit sur la surface $S_{y'}$ et sur la courbe $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \subset S_{y'}$. Nous noterons $\widehat{Y'}, S_{\widehat{Y'}}, \widehat{\mathscr{D}_{Y'}}$, etc. les quotients de toutes ces variétés par $\mathfrak{H}$.

2. Le lemme d'Horace géométrique

Dans cette partie, nous énonçons et commentons le lemme d'Horace géométrique. Ce lemme est prouvé par l'auteur dans [12]. Nous montrons ensuite qu'il est possible d'affaiblir une hypothèse de ce lemme (condition 9) lorsqu'un groupe de permutation agit sur les points en préservant les multiplicités.

2.1. Notations et énoncé

Fixons tout d'abord quelques conventions: Soit $y=(Q_1,\dots,Q_r)$ un point de X (nous notons abusivement $y=(Q_1,\dots,Q_r)$ même lorsque y n'est pas un point fermé). Soit G un fermé irréductible de $\mathbb{P}^2$. Nous dirons que les a points $Q_1,\dots,Q_a$ ($0\le a\le r$), sont *libres* sur G si y est le point générique de $G^a\times V\subset(\mathbb{P}^2)^r$, où V est une sous-variété de $(\mathbb{P}^2)^{(r-a)}$.

Supposons maintenant que Q_i est un point lisse d'une courbe plane C. On note $Q_i^C\in S_y$ le point d'intersection de la transformée stricte $\tilde{C}$ de C et du diviseur exceptionnel E_i; on note aussi $\mathscr{I}_{Q_i^C}$ le faisceau d'idéaux de Q_i^C sur S_y. Si $\underline{d}\in\operatorname{Pic}S_y$, les sections globales du faisceau $\mathscr{I}_{Q_i^C}(\underline{d})$ correspondent, sur le plan, aux courbes de degré d, ayant une multiplicité au moins m_j à chaque point Q_j ($1\le j\le r$) et, si la multiplicité en Q_i vaut exactement m_i, ayant une branche tangente à C en ce point.

Lemme 2.1. *Soient $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r)\in\mathbb{Z}^{r+1}$ et $x=(P_1,\dots,P_r)$, $y=(Q_1,\dots,Q_r)$, deux points de X tels que x se spécialise en y. Soient C une courbe de $\mathbb{P}^2_y$ et $\tilde{C}$ sa transformée stricte sur S_y. On suppose $\tilde{C}$ géométriquement irréductible et lisse, de classe $\underline{c}\in\operatorname{Pic}(S_y)$ et de genre $g(\underline{c})$.*

***Dimension et spécialisation**. Supposons que:*

(1) *$\underline{d}.\underline{c}+1-g(\underline{c})=-a$ où $a\ge 0$ (condition d'ajustement);*

(2) *Parmi les points $Q_1,\dots,Q_r$, il y a $g(\underline{c})$ points libres sur C, affectés de multiplicités strictement positives;*

(3) *Si $a\ge 1$, il y a $a+1$ entiers $i_1,\dots,i_{a+1}$ tels que: $P_{i_1},\dots,P_{i_{a+1}}$ sont libres dans le plan $\mathbb{P}^2$, et $Q_{i_1},\dots,Q_{i_{a+1}}$ sont libres sur la courbe C;*

(4) *Si $a=0$, $\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}-\underline{c})$ est régulier;*
Si $a\ge 1$, $\mathscr{I}_{Q_{i_1}^C\cup\dots\cup Q_{i_{a+1}}^C}(\underline{d}-\underline{c})$ est régulier;

alors $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ est régulier et, s'il est non vide, $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ se spécialise en $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$.

***Irréductibilité**. Si, de plus, $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ est non vide et:*

(5) *La classe $\underline{c}$ n'est pas effective en position x;*

(6) *$\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est géométriquement irréductible;*

Alors $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ est géométriquement irréductible.

***Lissité**. Si, enfin,*

(7) *Si $a=0$, y est normal dans l'adhérence de x;*

(8) *$\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ rencontre $\tilde{C}$ transversalement;*

(9) $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})\cap\tilde{C}$ *est irréductible* (*pas géométriquement*);
(10) $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ *est lisse*;
Alors $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ *est lisse.*

La courbe C sera appelée la courbe *exploitée*. Le système $\mathscr{L}_y(\underline{d}-\underline{c})$ et la courbe $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ seront respectivement appelés système et courbe *résiduels*. En fait, $\mathfrak{D}_y(\underline{d})=\tilde{C}\cup\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$.

Remarque 2.2. *Si a est positif*: Si (1) entier a de la condition d'ajustement (1) est strictement positif, la dimension du système augmente de a. Ce cas se produit lorsque l'on spécialise "trop" de points sur C. Supposons par exemple que $\chi(\underline{d})>0$, et considérons la suite exacte: $0\to\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}-\underline{c})\to\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d})\to\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\underline{d})\to 0$. La condition (1) et le théorème de Riemann–Roch sur C donnent: $\chi(\underline{d}-\underline{c})=\chi(\underline{d})+a$. Par ailleurs, puisque $\mathscr{I}_{Q^C_{i_1}\cup\cdots\cup Q^C_{i_{a+1}}}(\underline{d}-\underline{c})$ est régulier, $\mathcal{O}(\underline{d}-\underline{c})$ l'est aussi. Ainsi, $\dim\mathscr{L}_y(\underline{d}-\underline{c})=\dim\mathscr{L}_y(\underline{d})=\dim\mathscr{L}_x(\underline{d})+a$. La dimension a augmenté de a.

Remarque 2.3. *Régularité des systèmes*: Si l'on souhaite seulement prouver qu'un système a la dimension attendue, il est possible d'appliquer le Lemme 2.1 à un système de courbes déjà soumises à des conditions infinitésimales sur C. Par exemple, si $b\le r$ et si $P_1,\dots,P_b$ sont des points lisses de C, le faisceau $\mathscr{I}_{P^C_1\cup\cdots\cup P^C_b}(\underline{d})$ est régulier, si les conditions (2), (3) et (4) sont respectées et si (1) est remplacée par $\underline{d}.\underline{c}+1-g(\underline{c})-b=-a$. On peut ainsi procéder par récurrence pour prouver la régularité d'un système.

Par ailleurs, au lieu de considérer $(a+1)$ points dans les hypothèses (3) et (4) on peut se contenter de a points seulement. Ces deux améliorations proviennent du lemme d'Horace différentiel usuel, tel qu'on le trouve dans [1].

Remarque 2.4. *Types de singularités dans le plan*: A priori, le Lemme 2.1 ne donne aucune indication quant aux types de singularités de la projection de $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ sur le plan. Toutefois, si $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})\cup\tilde{C}$ rencontre chaque diviseur exceptionnel E_i $(1\le i\le r)$ en m_i points distincts, $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ possède aussi cette propriété. Sa projection sur le plan ne possède donc que des singularités ordinaires de la multiplicité attendue.

2.2. *Affaiblissement des hypothèses par permutation des points*

Reprenons les notations du Lemme 2.1 et de la Section 1.4. Au couple $(y,\underline{d})$ on associe le groupe $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_y(\underline{d})$. Ce groupe est l'intersection du stabilisateur de $\underline{d}$ dans $\mathfrak{S}_r$ et du groupe de monodromie du morphisme $y\to\bar{y}$, où $\bar{y}$ est l'image de y dans le quotient de X par $\mathfrak{S}_r$.

Soit y' le point générique de la fibre de $p:F(\underline{d})\to X$ au dessus de y (Section 1.3). On sait que $\mathfrak{H}$ agit sur la surface $S_{y'}$ et sur la courbe $\mathfrak{D}_y(\underline{d})\subset S_{y'}$. Mais $\mathfrak{D}_y(\underline{d})=\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})\cup\tilde{C}$; puisque $\tilde{C}$ est définie au dessus de $\mathbb{C}$ (ou d'un point, fermé ou non, du système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(C)|$), elle est invariante sous l'action de $\mathfrak{H}$. Donc $\mathfrak{H}$ agit sur $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$.

Proposition 2.5. *L'hypothèse* (9) *du Lemme* 2.1 : $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \cap \tilde{C}$ *est irréductible, peut-être remplacée par*: $\widehat{\mathfrak{D}_y}(\underline{d}-\underline{c}) \cap \tilde{C} \subset S_{\widehat{y'}}$ *est irréductible.*

Preuve. Il faut revenir à la preuve du Lemme 2.1 [12]. Rappelons simplement l'idée de cette preuve pour la lissité:

Soit x' (resp. y') le point générique de la fibre de $p: F \to X$ au dessus de x (resp. y). La partie "dimension et spécialisation" du Lemme 2.1, nous assure que y' appartient à l'adhérence de x' et est normal dans cette adhérence. La courbe $\mathscr{D}_{x'}$ se spécialise donc en $\mathscr{D}_{y'}$.

La courbe $\mathscr{D}_{y'} = \tilde{C} \cup \mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est nodale et ses seuls points singuliers sont les points d'intersection de $\tilde{C}$ et $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$. Il est possible d'éclater les éventuelles singularités de $\mathfrak{D}_x(\underline{d}) = \mathscr{D}_{x'}$ en famille. Puisque $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ est irréductible (partie précédente du lemme), son éclatement est connexe. Puisque la base est normale en y', et que $\tilde{C} \cup \mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est irréductible, l'éclatement des singularités de $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ se spécialise en l'éclatement de *tous* les nœuds de $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$. On obtient alors deux composantes connexes au dessus de y'. Ceci est impossible.

Soit X' (resp. Y') l'adhérence de x' (resp. y') dans F. Puisque $\mathfrak{H}$ agit sur Y', on peut prolonger son action à X'. Le quotient $\hat{Y}'$ de Y' par $\mathfrak{H}$, est alors une sous variété de $\hat{X}'$, et l'on spécialise $\mathscr{D}_{\hat{x}'}$ en $\mathscr{D}_{\hat{y}'}$ Le groupe $\mathfrak{H}$ étant fini, la variété $\hat{X}'$ reste normale en $\hat{y}'$. Le raisonnement précédent s'applique encore, et montre que la courbe $\mathscr{D}_{\hat{x}'}(\underline{d}) = \mathfrak{D}_{\hat{x}}(\underline{d})$ est lisse. Par une extension finie du corps de base on retrouve $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ qui est donc lisse, elle aussi. $\square$

Cette amélioration est importante, comme le montre l'exemple suivant:

Exemple. Soient y le point générique de $(\mathbb{P}^2)^3$, L une droite, et $\underline{d}$ la classe $(2;2,1,1)$. La courbe $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$, est la réunion de deux droites. Elle coupe $\tilde{L}_y$ en deux points. Au dessus de y, la variété d'intersection résiduelle $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \cap \tilde{L}_y$ est réductible: les deux points d'intersection ne peuvent pas être permutés.

Le groupe $\mathfrak{H}_y(\underline{d})$ est le groupe $\mathfrak{S}_2$ des permutations de P_2 et P_3. Au dessus de $\hat{y} \in \hat{X}$, les deux points P_2 et P_3 peuvent être échangés, ce qui a pour effet de permuter les deux points d'intersection: au dessus de $\hat{y}$, l'intersection est irréductible.

3. Monodromie et répartitions symétriques

Nous abordons ici le problème posé par la condition (9) du lemme d'Horace géométrique: Etant donné une courbe C sur une surface rationnelle S, et une famille $\mathscr{D}$ de courbes, coupant C transversalement, comment prouver que l'intersection de C et de la courbe générique $\mathscr{D}_x$ est irréductible?

Dans cette partie, nous réinterprétons ce problème en lui associant un groupe de monodromie. Il faut alors montrer que ce groupe agit transitivement. Nous définissons pour cela la notion de *répartition symétrique*: il s'agit de faire dégénérer la fibre générique afin de répartir les points de $\mathscr{D}_x \cap C$ en plusieurs blocs; ces blocs pouvant être permutés sous l'action du groupe $\mathfrak{H}$ défini à la Section 1.4.

3.1. Groupes de Galois et groupes de monodromie

Soit $\rho : Z \to T$ un morphisme fini entre schémas réduits sur un corps k de caractéristique 0. On suppose que T est irréductible, que toutes les composantes de Z dominent T, et on note $R \subsetneq T$ le lieu de branchement de ρ.

Soient $Z_1, \dots, Z_l$ les composantes irréductibles de Z. Posons K et K_i $(1 \le i \le l)$, les corps de fractions respectifs de T et Z_i. Les extensions $K \subset K_i$ sont de degré fini. Pour chaque i, choisissons un plongement φ_i de K_i dans une clôture algébrique commune de K. Soit L_i la clôture normale de $\varphi_i(K_i)$, et L le composé de tous les L_i. Le corps L sera appelé *corps de décomposition* du revêtement ρ.

Définition 3.1. On appelle groupe de Galois (ou groupe de monodromie) de Z sur T, et on note $\mathrm{Gal}(Z/T)$, le groupe de Galois de l'extension $K \subset L$.

Si le corps $k = \mathbb{C}$, $\mathrm{Gal}(Z/T)$ est simplement le groupe de monodromie d'une fibre générale du revêtement non ramifié $Z_{|(T-R)} \to (T - R)$ [10]. Rappelons sans démonstration deux propriétés fondamentales des groupes de monodromie ([10,16] et, pour la Proposition 3.3, [4, Chapter 5]).

Proposition 3.2. *Le schéma* $\Omega = Z \times_T \operatorname{Spec} L$, *obtenu par changement de base est un ensemble fini de points distincts* (L-points). *Le groupe* $\mathrm{Gal}(Z/T)$ *agit sur* Ω, *et son action est transitive si et seulement si* Z *est irréductible.*

Proposition 3.3. *Soit* Z' *un sous-schéma irréductible et réduit de* Z, *non contenu dans* R, *et soit* T' *l'image de* Z' *par* ρ. *Le groupe* $\mathrm{Gal}(Z'/T')$ est un sous groupe bien défini de $\mathrm{Gal}(Z/T)$. *Il est isomorphe au groupe* $\mathrm{Gal}(\rho^{-1}(T')/T')$ *qui n'est défini qu'à conjugaison près dans* $\mathrm{Gal}(Z/T)$.

Exemple 3.4. Soit $X \subset (\mathbb{P}^2)^r$ la variété des r-uplets de points distincts. Le groupe $\mathfrak{S}_r$ agit sur X et l'on note $\bar{X}$ la variété quotient. Par construction, le revêtement $\rho : X \to \bar{X}$ est galoisien, et $\mathrm{Gal}(X/\bar{X}) = \mathfrak{S}_r$. Soit Y, une sous variété irréductible et réduite de X et $\bar{Y} = \rho(Y)$. Puisque $X \to \bar{X}$ est galoisienne, $Y \to \bar{Y}$ l'est aussi. Le groupe $\mathrm{Gal}(Y/\bar{Y}) = \mathrm{Gal}(X_{|\bar{Y}}/\bar{Y})$ est un sous groupe de $\mathfrak{S}_r$.

3.2. Monodromie des intersections de courbes

Soit $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$ un $(r+1)$-uplet d'entiers, $y \in X$ un r-uplet de points distincts de $\mathbb{P}^2$ et C une courbe irréductible et réduite de $\mathbb{P}^2$ (C étant définie au dessus d'un point, fermé ou non du système linéaire $|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(C)|$).

Comme dans la Section 1.3, on note F le schéma paramétrant les courbes de classe $\underline{d}$. On note aussi $p: F \to X$ la projection naturelle, et $\mathscr{D} \subset S_F$ le diviseur relatif universel de classe $\underline{d}$. Soient $y \in Y$ et y' le point générique de la fibre $F_y = p^{-1}(y)$. La courbe C peut être vue comme une courbe de $\mathbb{P}^2_{y'}$ (afin d'alléger les notations, nous n'indiquons pas le changement du corps de base). Notons $\tilde{C}$ la transformé stricte de C sur le plan éclaté $S_{y'}$ et $\underline{c}$ sa classe dans $\operatorname{Pic} S_{y'}$. Dans cette section, nous supposons que $\tilde{C}$ rencontre $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ transversalement. Le morphisme $\tilde{C} \cap \mathfrak{D}_y(\underline{d}) \to y'$ est alors fini, non ramifié, de degré $\underline{d}.\underline{c}$.

Soit maintenant $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_y(\underline{d})$, le groupe défini à la Section 1.4. Ce groupe agit sur y', $S_{y'}$ et sur $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$. Puisque C est défini sur $\mathbb{C}$ il agit aussi comme l'identité sur $\tilde{C}$. On note $\widehat{y'}$ et $\widehat{\mathfrak{D}_y}(\underline{d})$ les quotients de y' et $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ par $\mathfrak{H}$.

Notation 3.5. On note $\mathfrak{G}_y(\underline{d}, C)$ (ou $\mathfrak{G}_y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le groupe de monodromie du morphisme fini $\tilde{C} \cap \mathscr{D}_{y'} \to y'$. On note $\widehat{\mathfrak{G}_y}(\underline{d}, C)$ (ou $\widehat{\mathfrak{G}_y}$) le groupe de monodromie du morphisme fini $\tilde{C} \cap \widehat{\mathfrak{D}_y}(\underline{d}) \to \widehat{y'}$.

A l'aide des Proposition 3.2 et 2.5, on peut remplacer l'hypothèse (9) du Lemme 2.1 par: $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ agit transitivement sur les L-points de $\tilde{C} \cap \widehat{\mathfrak{D}_y}(\underline{d})$ (où L est un corps de décomposition).

Proposition 3.6. Le groupe $\mathfrak{G}_y$ est un sous groupe distingué de $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ et il existe un morphisme surjectif: $\mathfrak{H} \to \hat{\mathfrak{G}}_y/\mathfrak{G}_y$.

Preuve. Soit $K = k(y')$ et $\hat{K} = k(\widehat{y'})$. Choisissons L (resp. $\hat{L}$) un corps de décomposition pour le morphisme fini $\tilde{C} \cap \mathscr{D}_{y'} \to y'$ (resp. $\tilde{C} \cap \widehat{\mathscr{D}_{y'}} \to \widehat{y'}$). Les relations d'inclusion sont les suivantes:

$$\begin{array}{ccccc} & & K & \subset & L \\ & & \cup & & \cup \\ \hat{K} & \subset & K \cap \hat{L} & \subset & \hat{L} \end{array}$$

Toutes les extensions de ce diagramme sont galoisiennes. Le groupe $\mathfrak{G}_y = \operatorname{Gal}(L/K)$ est naturellement isomorphe au groupe $\operatorname{Gal}(\hat{L}/(\hat{L} \cap K))$ et la dernière ligne du diagramme nous fournit la suite exacte:

$$0 \to \mathfrak{G}_y \to \hat{G}_y \to \operatorname{Gal}((\hat{L} \cap K)/\hat{K}) \to 0.$$

Ceci implique la première assertion. Le même diagramme nous donne aussi un morphisme surjectif de $\operatorname{Gal}(K/\hat{K})$ vers $\operatorname{Gal}(\hat{L} \cap K/\hat{K}) \simeq \widehat{\mathfrak{G}_y}/\mathfrak{G}_y$. Par définition, $\operatorname{Gal}(K/\hat{K})$ est isomorphe à $\operatorname{Gal}(y'/\widehat{y'})$. Il reste à montrer que $\operatorname{Gal}(y'/\widehat{y'})$ est isomorphe à $\mathfrak{H} = \operatorname{Gal}(y/\hat{y})$. Si e est la dimension de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$, c'est aussi celle de $\mathscr{L}_{\hat{y}}(\underline{d})$. Il suffit donc de remarquer que le morphisme fini $\mathbb{P}^e_k \times y \to \mathbb{P}^e_k \times \hat{y}$ a même groupe de monodromie que $y \to \hat{y}$. $\square$

3.3. Définition et propriété des répartitions symétriques

Soit C une courbe géométriquement irréductible et réduite de $\mathbb{P}^2$. Nous appelerons *répartition* sur C, tout couple $(y, \underline{d}) \in X \times \operatorname{Pic} S_y$ tel que le système $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est non vide, régulier, et que $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ rencontre $\tilde{C}$ transversalement.

Notons $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_y(\underline{d})$ le groupe défini à la Section 1.4.

Définition 3.7. Une *répartition symétrique* sur C est une répartition $(y, \underline{d})$ tel que: $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) = H_1 \cup \cdots \cup H_l \cup R$ où chaque courbe H_i $(1 \le i \le l)$ est géométriquement irréductible et réduite, de classe $\underline{h}_i$, et où:

- $\tilde{C} \cap H_i$ est irréductible;
- $R.\tilde{C} = 0$ et $\tilde{C}$ n'est pas composante de R;
- Pour tout $1 \le i, j \le l$ distincts, il existe $\sigma \in \mathfrak{H}$ tel que $\sigma(\underline{h}_i) = \underline{h}_j$.

Proposition 3.8. *Soit* $(y, \underline{d})$ *une* répartition symétrique *sur* C *et* $\underline{c}$ *la classe de* $\tilde{C}$ *dans* $\operatorname{Pic} S_y$. *L'action de* $\mathfrak{G}_y$ *possède* l *orbites de cardinaux* $\underline{d}.\underline{c}/l$ *et l'action de* $\widehat{\mathfrak{G}_y}$ *est transitive.*

Preuve. Ecrivons, comme dans la définition, $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) = H_1 \cup \cdots \cup H_l \cup R$. On remarque que $R \cap \tilde{C}$ est vide. L'intersection de $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ et $\tilde{C}$ est donc réunion des $H_i \cap \tilde{C}$.

Soit y' le point générique de la fibre $p^{-1}(y)$, où $p : F \to X$ (voir la Section 1.3). Soit $K = k(y')$ le corps résiduel de F en ce point, L le corps de décomposition du morphisme $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \cap \tilde{C} \to y'$, Ω l'ensemble des L-points de $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \cap \tilde{C}$ et Ω_i l'ensemble des L-points de $H_i \cap \tilde{C}$. Notons aussi L_i le corps de décomposition du revêtement $H_i \cap \tilde{C} \to y'$, et G_i le groupe de monodromie de ce revêtement. Par définition, on a les inclusions $K \subset L_i \subset L$. On a donc un morphisme surjectif $\mathfrak{G}_y \to G_i$. Puisque $H_i \cap \tilde{C}$ est irréductible, le groupe G_i agit transitivement sur les L_i-points de $H_i \cap \tilde{C}$. Donc $\mathfrak{G}_y$ agit aussi transitivement sur Ω_i.

Supposons maintenant que l'une des orbites, O de $\mathfrak{G}_y$ soit réunion de plusieurs Ω_i: $O = \Omega_{i_1} \cup \cdots \cup \Omega_{i_q}$. Puisque $\mathfrak{G}_y$ agit transitivement sur O, le schéma $(H_{i_1} \cap \tilde{C}) \cup \cdots \cup (H_{i_q} \cap \tilde{C})$ est irréductible (Proposition 3.2). Ceci est impossible. Les orbites de $\mathfrak{G}_y$ sont donc les ensembles Ω_i, de cardinaux $\underline{d}.\underline{c}/l$.

Soient maintenant $1 \le i, j \le l$ deux entiers distincts. Soit σ l'élément de $\mathfrak{H}$ tel que $\sigma(\underline{h}_i) = \underline{h}_j$. Par définition, le groupe $\mathfrak{H}$ agit sur $S_{y'}$ et sur $\mathscr{D}_{y'} = \mathfrak{D}_y(\underline{d})$. Puisque σ laisse $\mathscr{D}_{y'}$ invariante, $\sigma(H_i)$ est une composante de $\mathscr{D}_{y'}$, et sa classe vaut $\sigma(\underline{h}_i) = \underline{h}_j$. Donc $\sigma(H_i) = H_j$. Puisque $\tilde{C}$ est définie au dessus de $\mathbb{C}$, elle est invariante sous l'action de $\mathfrak{H}$. Ainsi, $\sigma(\tilde{C} \cap H_i) = \tilde{C} \cap H_j$.

D'après la Propriété 3.6, il existe un morphisme surjectif $\varphi : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{G}_y}/\mathfrak{G}_y$. Soit γ un relèvement de $\varphi(\sigma)$ dans $\hat{G}_y$. On voit que $\gamma(\Omega_i) = \Omega_j$. Ainsi, les l orbites Ω_i peuvent être permutées sous l'action de $\hat{G}_y$: cette action est transitive. $\square$

3.4. Un modèle de répartition symétrique

Nous donnons ici un exemple simple de répartition symétrique. Cet exemple servira de modèle aux répartitions utilisées dans la preuve du Théorème 1.

Soit C une courbe plane *rationnelle*, géométriquement irréductible et réduite de degré c, et $\underline{d}$ un $(r+1)$-uplet d'entiers positifs tel que $\chi(\underline{d}) \geq 1$. Soit h un entier positif, et $U \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(h)|$ l'ouvert des courbes irréductibles et lisses. Le diviseur canonique au dessus de U sera noté $\mathscr{H} \subset \mathbb{P}^2 \times U$.

Supposons qu'il existe deux entiers α et β tels que $\beta \leq hc$ et que $\underline{d}$ s'écrive $\underline{d} = (d; m^{3\alpha+3h^2}, n^{3\beta}, m_{3(\alpha+h^2+\beta)+1}, \ldots, m_r)$ où $m, n, m_i \geq 1$. On définit un point de X à l'aide de la variété V suivante:

$$\begin{aligned} W = \{(u_1,u_2,u_3,t) \in U^3 \times X \mid\ & t = (P_1,\ldots,P_r) \text{ où les } P_i \text{ sont distincts} \\ & \text{et pour } 1 \leq i,j,k \leq 3 \text{ et } i,j,k \text{ distincts,} \\ & \text{les courbes } \mathscr{H}_{u_i}, \mathscr{H}_{u_j}, \mathscr{H}_{u_k} \text{ croisent } C \text{ et se croisent transversalement,} \\ & \text{les points } P_{(i-1)\alpha+1},\ldots,P_{i\alpha} \text{ sont sur } \mathscr{H}_{u_i}, \text{hors de } C, \mathscr{H}_{u_j} \text{ et } \mathscr{H}_{u_k}, \\ & \text{les points } P_{3\alpha+(i-1)h^2+1},\ldots,P_{3\alpha+ih^2} \text{ sont en } \mathscr{H}_{u_j} \cap \mathscr{H}_{u_k}, \\ & \text{les points } P_{3(\alpha+h^2)+(i-1)\beta+1},\ldots,P_{3(\alpha+h^2)+i\beta} \text{ sont en } \mathscr{H}_{u_i} \cap C, \\ & \text{les points } P_{3(\alpha+\beta+h^2)+1},\ldots,P_r \text{ sont hors de } \mathscr{H}_{u_i}, \mathscr{H}_{u_j} \text{ et } \mathscr{H}_{u_k}\}. \end{aligned}$$

Soit W^0 une composante irréductible de W, et Y l'image de W^0 par la projection naturelle de W sur X. Le schéma Y est irréductible; on note y son point générique.

Soit (v_1, v_2, v_3, y), un point de la fibre de W^0 au dessus de y. Nous noterons H_i la transformée stricte de $\mathscr{H}_{v_i}$ sur S_y. La classe $\underline{h}_i$ de H_i s'écrit facilement. Par exemple, $\underline{h}_1 = (h; 1^\alpha, 0^{2\alpha}, 1^{h^2}, 0^{2h^2}, 1^\beta, 0^{r-3\alpha-3h^2-\beta})$.

Proposition 3.9. *Avec les notations ci-dessus, si* $\alpha \geq (h-1)(h-2)/2$ *et si*:

$$\underline{h}_1.\underline{d} + 1 - g(\underline{h}_1) = 0, \tag{1}$$

$$\underline{c}.(\underline{h}_1 + \underline{h}_2 + \underline{h}_3) = \underline{c}.\underline{d}, \tag{2}$$

$$h^1(S_y, \underline{d} - \underline{h}_1 - \underline{h}_2 - \underline{h}_3 - \underline{c}) = 0, \tag{3}$$

Alors $(y, \underline{d})$ *est une répartition symétrique sur* C *et* $\mathscr{D}_y(\underline{d}) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup R$, *où* $R = \mathscr{D}_y(\underline{d} - \underline{h}_1 - \underline{h}_2 - \underline{h}_3)$.

Preuve. Montrons d'abord que les trois courbes H_1, H_2 et H_3 sont composantes fixes du système. Pour H_1, on considère la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{S_y}(\underline{d} - \underline{h}_1) \to \mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}) \to \mathcal{O}_{H_1}(\underline{d}) \to 0.$$

Puisque $\underline{h}_1.\underline{d} + 1 - g(\underline{h}_1) = 0$, $\chi(\mathcal{O}_{H_1}(\underline{d})) = 0$. Par ailleurs, les points $P_1, \ldots, P_\alpha$ sont en position générale sur H_1. Puisque α est supérieur ou égal à $(h-1)(h-2)/2$, qui est le genre de H_1, le diviseur $\mathcal{O}_{H_1}(\underline{d})$ est nonspécial et $h^0(\mathcal{O}_{H_1}(\underline{d})) = h^1(\mathcal{O}_{H_1}(\underline{d})) = 0$. On en déduit que H_1 est composante fixe de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$, et que $h^1(\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d} - \underline{h}_1)) = h^1(\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}))$.

La position des points étant symétrique les suites exactes similaires pour H_2 et H_3 montrent que ces deux courbes sont aussi des composantes fixes de $\mathscr{L}_y(\underline{d})$, et que $h^1(\mathscr{O}_{S_y}(\underline{d}))=h^1(\mathscr{O}_{S_y}(\underline{d}-\underline{h}_1-\underline{h}_2-\underline{h}_3))$. Nous poserons $\underline{d}'=\underline{d}-\underline{h}_1-\underline{h}_2-\underline{h}_3$, et noterons R la courbe générique de $\mathscr{L}_y(\underline{d}')$. Ce qui précède montre $\mathfrak{D}_y(\underline{d})=H_1\cup H_2\cup H_3\cup R$. Par définition, les courbes H_i rencontrent $\tilde{C}$ transversalement.

Puisque y est le point générique de Y, la courbe H_1 peut être vue comme la courbe générique du système linéaire $|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(h)|$. Son intersection avec $\tilde{C}$ est donc irréductible (voir la Proposition 4.1). Il en est de même pour H_2 et H_3.

La condition (2) signifie: $R.\tilde{C}=0$. Montrons maintenant que $\tilde{C}$ n'est pas une composante fixe de $\mathscr{L}_y(\underline{d}')$. Soit Q un point générique de $\tilde{C}$. Il suffit de prouver que $\mathscr{I}_Q(\underline{d}')$ est régulier. Considérons la suite exacte:

$$0\to\mathscr{O}_{S_y}(\underline{d}'-\underline{c})\to\mathscr{I}_Q(\underline{d})\to\mathscr{I}_{Q,\tilde{C}}(\underline{d}')\to 0.$$

D'après la condition (2), $\chi(\mathscr{I}_{Q,\tilde{C}}(\underline{d}'))=(\underline{d}'.\underline{c}-1)+1-g(\tilde{C})$ est nulle (on a utilisé deux fois la condition (2). Il est ici essentiel que C soit rationnelle). Puisque $\tilde{C}$ est rationnelle, $\mathscr{I}_{Q,\tilde{C}}(\underline{d}')$ est non spécial et $h^0(\mathscr{I}_{Q,\tilde{C}}(\underline{d}'))=h^1(\mathscr{I}_{Q,\tilde{C}}(\underline{d}'))=0$. Par suite, $h^1(\mathscr{I}_Q(\underline{d}))=h^1(\mathscr{O}_{S_y}(\underline{d}'-\underline{c}))$, qui est nul d'après la condition (3). Ceci montre aussi que $h^1(\underline{d})$ est nul. Le système $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est donc régulier.

Il reste à vérifier le dernier point de la définition. Soit $\bar{Y}$ l'image de Y dans le quotient de X par le groupe $\mathfrak{S}_r$. Il nous faut trouver un élément σ de $\mathrm{Gal}(Y,\bar{Y})$, laissant $\underline{d}$ invariant, et tel que $\sigma(\underline{h}_1)=\underline{h}_2$. Soit Z la variété suivante, où l'on pose $s=r-3\beta-3h^2$ et où y est le r-uplet $(P_1,\ldots,P_r)$:

$$\begin{aligned} Z=\{(u_1,u_2,u_3,t)\in U^3\times(\mathbb{P}^2)^s\mid t=(Q_1,\ldots,Q_s)&\text{ où les } Q_i \text{ sont distincts}\\ &\text{et pour } 1\le i,j,k\le 3 \text{ et } i,j,k \text{ distincts},\\ &\text{les courbes } \mathscr{H}_{u_i},\mathscr{H}_{u_j},\mathscr{H}_{u_k} \text{croisent } C \text{ et se croisent transversalement},\\ &\text{les points } Q_{(i-1)\alpha+1},\ldots,Q_{i\alpha} \text{ sont sur } \mathscr{H}_{u_i},\text{ hors de } C,\mathscr{H}_{u_j} \text{ et } \mathscr{H}_{u_k},\\ &\text{pour } 3\alpha+1\le l\le r-3\beta-3h^2,\text{ le point } Q_l \text{ est égal à } P_{l+3(\beta+h^2)}\}. \end{aligned}$$

La fibre de la projection $Z\to U^3$ au dessus de (u_1,u_2,u_3) est un ouvert de $\mathscr{H}^{\alpha}_{u_i}\times\mathscr{H}^{\alpha}_{u_j}\times\mathscr{H}^{\alpha}_{u_k}$. Ces fibres étant irréductibles et de dimension constante, Z est irréductible. Considérons maintenant le morphisme naturel $W\to Z$ (oubli des points $P_{3\alpha+1},\ldots,P_{3(\alpha+\beta+h^2)}$). Ce morphisme est fini. Ses fibres constituent l'ensemble des choix possibles pour placer des points aux intersections $\mathscr{H}_{u_i}\cap\mathscr{H}_{u_j}$ et $\mathscr{H}_{u_i}\cap\tilde{C}$. (Elles sont donc de cardinal $(q^2!)^3\times(\binom{hc}{\beta}\times\beta!)^3$). Puisque W^0 est une composante de W, le morphisme restreint $\psi: W^0\to Z$ est aussi fini. Il est par ailleurs clair que W^0 se projette surjectivement sur Z.

Soit $\omega=(u_1,u_2,u_3,t)$ un point fermé général de W^0. Posons $\psi(\omega)=(u_1,u_2,u_3,z)$. Si $t=(Q_1,\ldots,Q_r)$, alors z s'écrit $(Q_1,\ldots,Q_{3\alpha},Q_{3(\alpha+\beta+h^2)+1},\ldots,Q_r)$. Effectuons une permutation du premier et du deuxième bloc de α points dans z. On obtient un s-uplet z', et on vérifie aisément que le point (u_1,u_2,u_3,z') est un point de Z. Soit γ, un chemin tracé sur Z reliant (u_1,u_2,u_3,z) à (u_1,u_2,u_3,z'). Relevons γ par le revêtement $W^0\to Z$. On obtient un chemin μ tracé sur W^0. Nécessairement, les ensembles de points $\{\mathscr{H}_{u_1} \cap C\}$ et $\{\mathscr{H}_{u_2} \cap C\}$ ont été permutés, de même que $\{\mathscr{H}_{u_1} \cap \mathscr{H}_{u_3}\}$ et $\{\mathscr{H}_{u_2} \cap \mathscr{H}_{u_3}\}$. L'image λ de μ par le morphisme fini $W^0 \to Y$ est un lacet de Y, et l'image σ de λ dans $\mathrm{Gal}(Y/\bar{Y})$ stabilise $\underline{d}$ et envoie bien $\underline{h}_1$ sur $\underline{h}_2$. $\square$

4. Systèmes faiblement contraints

Dans cette partie, nous définissons et étudions les "systèmes faiblement contraints" sur une courbe plane intègre C. Ce sont des systèmes de courbes assignées à passer avec la multiplicité 1 par un grand nombre de points génériques sur C. De tels systèmes se comportent souvent comme si les conditions imposées par ces points de C n'existaient pas.

On est alors en présence d'un système de grande dimension, et l'on peut appliquer le théorème de Bertini pour prouver que la courbe générique est irréductible et lisse. On peut aussi appliquer les techniques proposées par Harris [10] pour prouver que le groupe de monodromie de l'intersection de C et des courbes du système est le groupe symétrique tout entier.

4.1. Systèmes de grande dimension

On considère qu'un système $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est de grande dimension si $\chi(\underline{d}) \geq d+1$. Nous étudions ces systèmes en imposant quelques conditions techniques:

Dans toute cette section et la suivante, y désigne un r-uplet de points distincts tels qu'aucun triplet n'est aligné; $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r)$ est un élément de $\mathrm{Pic}\, S_y$ tel que $d \geq 2m+1$ où $m = \max_{1 \leq i \leq r} m_i$; C une courbe plane de degré supérieur ou égal à 2 telle que sa transformée stricte $\tilde{C}$ sur S_y est géométriquement irréductible et lisse; et Q est un point générique de $\tilde{C}$.

Proposition 4.1. *Supposons que* $\chi(\underline{d}) \geq d+1$.

(a) *Si* $\mathcal{O}(d-1; m_1, \ldots, m_r)$ *est régulier alors* $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ *est sans point base, la courbe* $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ *est géométriquement irréductible, lisse et rencontre chaque diviseur exceptionnel* E_i *en* m_i *points distincts.*

(b) *Si de plus* $\mathscr{I}_Q(d-1; m_1, \ldots, m_r)$ *est régulier alors* $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ *rencontre* $\tilde{C}$ *transversalement et* $\mathfrak{G}_y(\underline{d}, C) = \mathfrak{S}_{\underline{d}.\underline{c}}$.

Preuve. (a) Montrons d'abord que $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est sans point base sur S_y: Puisque $\chi(\underline{d}) \geq 1$, il suffit de prouver que, pour tout point Q de S_y, $H^1(S_y, \mathscr{I}_Q(\underline{d}))$=0. C'est ce que montre le Lemme 4.2.

Puisque $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est sans point base, le théorème de Bertini montre que $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ est lisse. Supposons que $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ n'est pas géométriquement irréductible et notons $D_1, \ldots, D_l$ ($l \geq 2$) ces composantes irréductibles (au dessus d'un corps de base éventuellement plus gros). Notons $\underline{d}_i \in \mathrm{Pic}\, S_y$ la classe de D_i.

Considérons i et j ($1 \leq i,j \leq r$), deux entiers distincts et P, un point de D_j. Le système $\mathscr{L}_y(\underline{d}_i)$ est de dimension positive (il est sans point base), donc il existe une courbe $D_i' \in \mathscr{L}_y(\underline{d}_i)$ passant par P. Puisque $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ est lisse, $D_j.D_i' = 0$ et D_j est nécessairement une composante de D_i': Le système $\mathscr{L}_y(\underline{d}_i - \underline{d}_j)$ est effectif. Il en est de même pour $\mathscr{L}_y(\underline{d}_j - \underline{d}_i)$. On en déduit que $\underline{d}_i = \underline{d}_j$ $\forall 1 \leq i,j \leq l$.

Ainsi, $\underline{d} = l\underline{d}_1$, et $\underline{d}^2 = 0$. Puisque $\chi(\underline{d}) + g(\underline{d}) = \underline{d}^2 + 2$, on obtient: $g(\underline{d}) \leq 1 - d$. On sait aussi que $g(l\underline{d}_1) = lg(\underline{d}_1) - (l-1)$. Ainsi, $lg(\underline{d}_1) \leq l - d$. Mais $g(D_1)$ est positif ou nul, et l ne peut-être plus grand que d. Nécessairement, $l = d$ et D_1 est une droite de classe $\underline{d}_1$ telle que $\underline{d}_1^2 = 0$. On peut supposer que $\underline{d}_1 = (1;1)$ et $\underline{d} = (d;d)$; mais ce cas est exclu car $d \geq 2m+2$.

Par ailleurs, le théorème de Bertini appliqué à chaque diviseur exceptionnel E_i montre que $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ rencontre E_i transversalement, en m_i points distincts.

(b) Il suffit de montrer que $\mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}_y(\underline{d}, C)$ contient une transposition et agit 2-transitivement sur les points de $\mathfrak{D}_y(\underline{d}) \cap \tilde{C}$. Posons $V = \mathscr{L}_y(\underline{d})$ et $\mathscr{D} \subset S_y \times V$ le diviseur universel au dessus de V. Si $v \in V$, on note $\mathscr{D}_v$ la fibre du morphisme naturel $\mathscr{D} \to V$.

2-transitivité de $\mathfrak{G}_y$: Soit U l'ouvert de V tel que, si $v \in U$, $\mathscr{D}_v$ rencontre $\tilde{C}$ transversalement. Cet ouvert est non vide car $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est sans point base. Considérons la variété $J \subset U \times \tilde{C} \times \tilde{C}$ suivante:

$$J = \{(v, Q_1, Q_2) \in U \times \tilde{C}^2 \mid Q_1 \neq Q_2,\ Q_1, Q_2 \in \mathscr{D}_v \cap \tilde{C}\}$$

Soit q la projection naturelle de J sur $\tilde{C} \times \tilde{C}$. En appliquant le Lemme 4.2, on constate que les fibres de q sont des espaces projectifs de dimension constante $\chi(\underline{d}) - 3$. La variété J est donc irréductible, et $\mathfrak{G}_y$ est 2-transitif.

Une transposition dans $\mathfrak{G}_y$: Soit $I = \mathscr{D} \cap (\tilde{C} \times T)$ la variété d'intersection. D'après Harris ([10] lemme de la section II.3), il suffit de montrer qu'il existe un point $v \in V$ tel que $\mathscr{D}_v$ rencontre $\tilde{C}$ en $n-2$ points distincts et un point double de support Q, et que I soit localement irréductible au voisinage (formel) de (Q, v).

En utilisant la projection $I \to \tilde{C}$, dont les fibres sont des espaces projectifs de dimension $\chi(\underline{d}) - 2$, on montre que I est lisse. L'irréductibilité locale est donc évidente.

Soit Q un point général de $\tilde{C}$, S' l'éclatement de S_y en Q, et $E = E_{r+1}$ le diviseur exceptionnel au dessus de Q. Soit Q' le point d'intersection de $\tilde{C}$ et E. Puisque $h^1(S', \mathcal{O}(d-1; m_1, \ldots, m_r, 1)) = 0$ (le groupe de picard vaut maintenant $\mathbb{Z}^{r+1}$), on peut appliquer le Lemme 4.2. Ceci montre que le système linéaire $|\mathscr{I}_{Q'}(d; m_1, \ldots, m_r, 1)|$ n'a pas de point base –même infiniment voisin de Q'– autre que Q' sur S'. En conséquence, si Z est le schéma de longueur 2 et de support Q sur $\tilde{C}$, une courbe générale de $|\mathscr{I}_Z(\underline{d})|$ rencontre $\tilde{C}$ en $(n-2)$ points distincts et en Z. Une telle courbe correspond au point v recherché. $\square$

Lemme 4.2. *Avec les notations et hypothèses présentées en début de section, soit* Z *un schéma de dimension zéro et de longueur* 2 *sur* S_y. *Si* $\chi(\underline{d}) \geq d+1$ *et* $\mathcal{O}(d-1; m_1, \ldots, m_r)$ *est régulier, alors* $h^1(\mathscr{I}_Z(\underline{d})) = 0$.

Preuve. Notons $E_1,\dots,E_r$ les diviseurs exceptionnels de S_y et $\pi : S_y \to \mathbb{P}^2$, l'éclatement du plan. Nous distinguons plusieurs cas, suivant la position relative de Z et des diviseurs exceptionnels, en particulier E_1 et E_2 (ou, de manière similaire, n'importe quel couple parmi les E_i).

(1) *Le support de Z ne rencontre aucun des E_i.* Dans ce cas, il existe une droite L passant par $\pi(Z)$. Soit $\tilde{L}$ la transformée stricte de cette droite. La classe de $\tilde{L}$ dans $\operatorname{Pic} S_y$ s'écrit $\underline{l}=(1;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ où ε_i vaut 1 si L passe par P_i, et zéro sinon. Considérons la suite exacte:

$$H^1(S_y,\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}-\underline{l})) \to H^1(S_y,\mathcal{I}_Z(\underline{d})) \to H^1(\tilde{L},\mathcal{I}_{Z,\tilde{L}}(\underline{d})). \tag{4}$$

Puisque le système $\mathcal{L}_y(d-1;m_1,\dots,m_r)$ est régulier, le système $\mathcal{L}_y(d-1;m_1-\varepsilon_1,\dots,m_r-\varepsilon_r)$ l'est a fortiori. Mais $\chi(\underline{d}-\underline{l})=\chi(\underline{d})-(d+1)+\sum_{i=1}^{r}\varepsilon_i m_i$, est positif ou nul par hypothèse. Donc $H^1(S_y,\mathcal{O}_{S_y}(\underline{d}-\underline{l}))=0$.

Par ailleurs, puisque $\tilde{L}$ est rationnelle, le système $|\mathcal{I}_{Z,\tilde{L}}(\underline{d})|$ est régulier, de degré $\underline{d}.\underline{l}-2$. Puisque qu'aucun triplet de points n'est aligné et que $d \ge 2m+1$, on voit facilement que $\underline{d}.\underline{l}-2 \ge -1$. Par suite, $h^1(\tilde{L},\mathcal{I}_{Z,\tilde{L}}(\underline{d}))=0$ et la suite exacte (4) montre que $h^1(S_y,\mathcal{I}_Z(\underline{d}))=0$.

(2) *Z est l'union de deux points distincts $Q_1 \in E_1$ et $Q_2 \in E_2$.* Soit $\underline{d}'=(d;m_1+1,m_2+1,m_3,\dots,m_r) \in \operatorname{Pic} S_y$. Il existe une suite exacte:

$$H^1(S_y,\mathcal{O}(\underline{d}')) \to H^1(S_y,\mathcal{I}_Z(\underline{d})) \to H^1(E_1,\mathcal{I}_{Q_1}(m_1)) \oplus H^1(E_2,\mathcal{I}_{Q_2}(m_2)).$$

Le terme de droite est clairement nul. Soit L la droite passant par P_1 et P_2. La classe de sa transformée stricte est $\underline{l}=(1;1^2,0^{r-2})$. La suite exacte (4) ci-dessus, où Z est vide, montre que $h^1(S_y,\mathcal{O}(\underline{d}'))$ est nul si $h^1(S_y,\mathcal{O}(\underline{d}'-\underline{l}=(d-1;m_1,\dots,m_r)))=0$. Ceci est vrai par hypothèse.

(3) *Z est supporté par E_1 mais n'y est pas inclus.* Soit $Q \in E_1$ le support de Z. On note toujours $\underline{d}'=(d;m_1+1,m_2,\dots,m_r)$. Il existe une suite exacte "résiduelle" relativement à E_1: $H^1(S_y,\mathcal{I}_Q(\underline{d}')) \to H^1(S_y,\mathcal{I}_Z(\underline{d})) \to H^1(E_1,\mathcal{I}_{Q,E_1}(m_1))$. Le terme de droite est nul. Considèrons la droite L du plan passant par P_1 dans la direction définie par Q. Sa transformée stricte $\tilde{L}$, de classe $\underline{l}$ passe par Q, et la suite exacte $H^1(S_y,(\underline{d}-\underline{l})) \to H^1(S_y,\mathcal{I}_{Q,E_1}(\underline{d}')) \to H^1(\tilde{L},\mathcal{I}_{Q,\tilde{L}}(\underline{d}))$ montre que $H^1(S_y,\mathcal{I}_Q(\underline{d}'))=0$.

(4) *Z est contenu dans E_1.* On pose $\underline{d}'=(d;m_1+1,m_2,\dots,m_r)$ et on utilise la suite exacte: $H^1(S_y,\mathcal{O}(\underline{d}')) \to H^1(S_y,\mathcal{I}_Z(\underline{d})) \to H^1(E_1,\mathcal{I}_{Z,E_1}(m_1))$. On conclut à l'aide d'une droite L passant par P_1.

(5) *Z est l'union de deux points distincts $Q_1 \in E_1$ et $Q_2 \notin E_i$ $(1 \le i \le r)$.* Comme dans le cas (2), on procède en deux temps, en utilisant d'abord le diviseur exceptionnel E_1, puis la droite L passant par P_1 et $\pi(Q_2)$. □

4.2. Systèmes faiblement contraints

Définition 4.3. Soient $y \in X$, $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r) \in \operatorname{Pic} S_y$ et C une courbe plane intègre. Le système $\mathcal{L}_y(\underline{d})$ est dit *faiblement contraint* sur C, par les points $P_{i_1},\dots,P_{i_a}$

$(0 \leq a \leq r)$ si ces points sont libres sur C, si $m_{i_1} = \cdots = m_{i_a} = 1$, et si $\chi(\underline{d}) + a \geq d + 1$.

Comme le montre la proposition suivante, un système faiblement contraint sur C se comporte presque comme un système de grande dimension. Nous reprenons ici les notations et hypothèses de la Section 4.1.

Proposition 4.4. *Si $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est faiblement contraint par les a derniers points sur C et si les deux faisceaux $\mathcal{O}(d-1; m_1, \ldots, m_{r-a}, 0^a)$ et $\mathscr{I}_Q(\underline{d})$ sont réguliers, alors la courbe $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ est géométriquement irréductible et lisse et rencontre chaque diviseur exceptionnelle E_i $(1 \leq i \leq r)$ en m_i points distincts. De plus, $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ rencontre $\tilde{C}_y$ transversalement, en dehors des E_i, et $\mathfrak{G}_y(\underline{d}, C) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{\underline{d}.\underline{c}}$.*

Preuve. Notons $\underline{b}$ la classe $(d; m_1, \ldots, m_{r-a})$, $z = (P_1, \ldots, P_{r-a})$ le $(r-a)$-uplet des premiers points de y, et W le système linéaire $\mathscr{L}_z(\underline{b})$. Le diviseur universel au dessus de W sera noté $\mathscr{B} \subset S_z \times W$. Puisque $\mathscr{L}_y(\underline{d})$ est régulier, $\dim W = \chi(\underline{d}) + a - 1$. Posons $\tilde{C}$ la transformée stricte de C sur S_z et considérons $V \subset W \times \tilde{C}^a$, la variété définie par:

$$V = \{(w, (Q_1, \ldots, Q_a)) \in W \times \tilde{C}^a \mid Q_1 \cup \cdots \cup Q_a \subset \mathscr{B}_w \cap \tilde{C}\}.$$

(l'union des Q_i est ici schématique sur $\tilde{C}$: les Q_i ne sont pas forcément distincts. Cela ne crée pas d'ambiguité, car $\tilde{C}$ est lisse). Considérons la projection $q_1 : V \to \tilde{C}^a$. Si $(Q_1, \ldots, Q_a)$ est général sur $\tilde{C}$, $h^1(S_y, \mathscr{I}_{Q_1 \cup \cdots \cup Q_a}(\underline{b}))=0$. Il existe donc un ouvert $O \subset \tilde{C}^a$ tel que, au-dessus de O, les fibres de q_1 soient des espaces projectifs de dimension constante. L'ouvert $U = q_1^{-1}(O)$ est donc irréductible dans W, de dimension $\chi(\underline{d}) + a - 1$.

Soit maintenant $q_2 : U \to W$, la deuxième projection. Si q_2 n'est pas dominante, $q_2(U)$ est contenu dans une sous variété propre de W, de dimension au plus $\chi(\underline{d}) + a - 2$. Les fibres de q_2 sont donc de dimension au moins 1. Si $t = (Q_1, \ldots, Q_a)$ est le point générique de $\tilde{C}^a$, et si G est la courbe générique de $|I_{Q_1 \cup \cdots \cup Q_a}(\underline{b})|$, la fibre $q_2^{-1}(q_2(G,t))$ est l'ensemble des a-uplets de points (éventuellement infiniment proches) contenus dans $G \cap \tilde{C}$. Si $\dim q_2^{-1}(q_2(G,t)) \geq 1$, cet ensemble est infini, donc $\tilde{C}$ est une composante de G. Par suite, le faisceau $\mathscr{I}_{Q_1 \cup \cdots \cup Q_a \cup Q}(\underline{b})$ n'est pas régulier, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi $q_2 : U \to W$ est dominant. La courbe générique de $|\mathscr{I}_{Q_1 \cup \cdots \cup Q_a}(\underline{b})|$ est donc isomorphe à la courbe générique de $|\mathcal{O}(\underline{b})|$ (à un changement du corps de base près). Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme 4.1 qui montre que $\mathfrak{D}_y(\underline{b})$ est lisse, géométriquement irréductible, et rencontre les diviseurs exceptionnels en m_i points distincts. Il en va de même pour $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$.

• Le fait que $\mathfrak{D}_y(\underline{d})$ rencontre $\tilde{C}_y$ transversalement, en dehors des E_i est immédiat au vu des résultats précédents. Montrons que $\mathfrak{G}_y(\underline{d}, C) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{\underline{d}.\underline{c}}$. On procède par récurrence sur l'entier a. Si $a = 0$, le résultat provient de la Proposition 4.1. Traitons le cas ou $a = 1$, les cas suivants se déduisant de la même façon.

Soit V la variété définie plus haut; V paramètre la famille de courbes $\mathscr{B}_V = \mathscr{B} \times_W V$, mais aussi une famille de surface S'_V (S_z éclatée au point Q_1) et deux familles de courbes $\mathscr{B}'_V$ et $\tilde{C}_V$ sur S'_V. ($\mathscr{B}'_V$ (resp. $\tilde{C}_V$) est la transformée totale de $\mathscr{B}_V$ (resp. $\tilde{C}_V$)

moins le diviseur exceptionnel au dessus de Q_1). Le groupe de monodromie recherché est celui du morphisme $\mathscr{B}'_V \cap \tilde{C}_V \to V$.

Soit $\rho : I = \mathscr{B}_V \cap (\tilde{C} \times V) \subset S_z \times V \to V$. Le morphisme ρ admet une section $\gamma : V \to I$ qui à (w, Q_1) associe $Q_1 \in \mathscr{B}_w \cap \tilde{C}$. Donc, I admet deux composantes, $\gamma(V)$ et J. On voit facilement que la variété $\mathscr{B}'_V \cap \tilde{C}_V$ est birationnelle à la variété J. Il suffit donc de connaitre le groupe de monodromie du revêtement $J \to V$. Considérons le diagramme cartésien suivant:

$$\begin{array}{ccc} I = \gamma(V) \cup J & \longrightarrow & \mathscr{B} \cap (\tilde{C} \times W) \\ \Big\downarrow \rho & & \Big\downarrow u \\ V & \xrightarrow{\ v\ } & W \end{array}$$

Il est clair que $\mathscr{B} \cap (\tilde{C} \times W)$ est isomorphe à V, et que les deux flèches u et v sont les mêmes. Ainsi, si K est le corps des fonctions de W et L le corps de décomposition du revêtement $V \to U$, le groupe de galois de $\gamma(V) \cup J \to V$ n'est autre que celui du morphisme $\operatorname{Spec}(L \otimes_K L) \to \operatorname{Spec} L$.

On peut supposer que L est le corps $K[T]/f$ où T est une indéterminée, et f un polynôme irréductible de degré $\underline{d}.\underline{c}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathfrak{S}_{\underline{d}.\underline{c}+1}$. Soit $\zeta \in L$ une racine de f. Sur L, $f(T)$ se factorise en $(T - \zeta)g(T)$ où g est irréductible sur L, de groupe de galois $\mathfrak{S}_{\underline{d}.\underline{c}}$. Ainsi, $L \otimes L \xrightarrow{\sim} K \times L[T]/g$. Nécessairement, le corps des fonctions de J vaut $\mathrm{spec}(L[T]/g)$, et $\mathrm{Gal}(J/U) = \mathrm{Gal}((L[T]/g)/L) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{G}_{\underline{d}.\underline{c}}$. □

5. Démonstration du théorème

Pour démontrer le Théorème 1, nous utilisons le lemme d'Horace géométrique en spécialisant plusieurs points sur une cubique rationnelle. La plupart des hypothèses de 2.1 peuvent être vérifiées grâce aux notions de répartition symétrique et de systèmes faiblement contraints.

La preuve proprement dite est effectuée en Section 5.2. Les répartitions symétriques nécessaires sont construites explicitement dans la dernière section. Mais avant tout, il nous faut démontrer un lemme d'annulation en position spéciale, lorsque plusieurs des points sont sur la cubique rationnelle.

Dans toute cette partie La cubique rationnelle générique de $\mathbb{P}^2$ (ayant un nœud) est notée C.

5.1. Un lemme de régularité en position spéciale

Nous démontrons ici la régularité de certains systèmes linéaires $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ lorsque plusieurs points sont situés sur la cubique C. Nous autorisons aussi la présence de quelques points infiniment voisins. Le résultat obtenu n'est en aucun cas optimal, mais il suffit à notre usage.

Nous reprenons les notations du Lemme 2.1.

Proposition 5.1. *Soient P_1 le nœud de C et $y=(P_1,\dots,P_r)$, le r-uplet générique de $P_1\times C^s\times(\mathbb{P}^2)^{r-s-1}$ $(0\le s\le r-1)$. Soient $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r)$ tel que $m_i\le 3$ $(1\le i\le r)$ et a un entier tel que $0\le a\le\min(27,s)$. Si $d\ge 67$ et $\underline{d}.\underline{c}-a\ge 140$, alors $\mathscr{I}_{P_2^C\cup\cdots\cup P_{a+1}^C}(\underline{d})$ est régulier.*

Preuve. On fait dégénérer la cubique C en l'union d'une droite L et d'une conique générale U. On spécialise P_1 en l'un des points d'intersection de L et C, et l'on spécialise t points sur la droite L, où t est le plus grand entier tel que $d-m_1-\cdots-m_t-a\ge 9$. Les autres points sont spécialisés sur U. Puisque t est le plus grand possible, deux cas se présentent: soit $t=s$, tous les points sont sur L, et $2d-m_1\ge 137$. Soit $t<s$ et $d-m_1-\cdots-m_t-a\le 11$; dans ce cas, puisque $\underline{d}.\underline{c}-a\ge 140$, $2d-m_1-m_{t+1}-\cdots-m_s\ge 140-11=129$.

D'après le Lemme 5.2 ci-dessous, ce système est régulier. Par semi-continuité, le système linéaire initial est lui aussi régulier. □

Lemme 5.2. *Soient U une conique générale, L une droite et P_1,P_2 les deux points d'intersection de U et L dans $\mathbb{P}^2$. On note $y=(P_1,\dots,P_r)\in X$, le point générique de $P_1\times P_2\times C^s\times L^t\times(\mathbb{P}^2)^{r-s-t-2}$ $(s,t\ge 0$ et $s+t+2\le r)$. Soit $\underline{d}=(d;m_1,\dots,m_r)$ tel que $0\le m_i\le 3$ pour $1\le i\le r$ et $m_i>0$ si $i>2$ et soit a, un entier tel que $0\le a\le\min(t,27)$.*

Si $d\ge 67$; $\underline{d}.\underline{l}-a\ge 9$ (i); et $\underline{d}.\underline{u}\ge 129$ (ii), alors $\mathscr{I}_{P^L_{s+3}\cup\cdots\cup P^L_{2+s+a}}(\underline{d})$ est régulier.

Preuve. Si $\chi(\mathscr{I}_{P^L_{s+3}\cup\cdots\cup P^L_{2+s+a}}(\underline{d}))>0$, il est toujours possible d'ajouter des points simples génériques dans le plan pour se ramener à une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Nous supposons donc que $\chi(\underline{d})-a\le 0$.

Nous procédons par récurrence sur le degré: Si $d=67$, puisque $\underline{d}.\underline{u}\ge 129$, il y a au plus 5 points sur la conique. On peut alors supposer que ces points sont en position générale dans le plan, et appliquer le Lemme 5.3 ci-dessous.

Supposons la propriété vraie pour $d-1$. Si $m_1=0$ et $s>0$, on spécialise P_3 en P_1; de même avec m_2 et P_2. Ainsi, on peut supposer que: soit $s=0$, soit m_1 et m_2 sont non nuls. En revanche, puisque qu'il y a peut-être plus de points sur L, il faut remplacer (ii) par: $\underline{d}.\underline{l}-a\ge 3$ (iii). Si $s=0$, on applique le Lemme 5.3 ci dessous. Sinon, montrons qu'il existe un entier l tel que $0\le l\le r-s-t-2$ et

$$-b{:=}d-(m_1+m_2+m_{3+s}+\cdots+m_{2+s+t+l})-a\in[-2,0]. \tag{5}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que:

$$\begin{aligned}
&d-(m_1+m_2+m_{3+s}+\cdots+m_r)-a<0\\
&\quad\Leftarrow_{\underline{d}.\underline{u}\ge 0}\ 3d-(2m_1+2m_2+m_1+\cdots+m_r)-a<0\\
&\quad\Leftarrow_{m_i\le 3}\ 3d-\tfrac{1}{2}(m_1(m_1+1)/2+\cdots+m_r(m_r+1)/2)-a<0\\
&\quad\Leftrightarrow\ 3d-\tfrac{1}{2}((d+1)(d+2)/2-\chi(\underline{d}))-a<0\\
&\quad\Leftarrow_{\chi(\underline{d})\le a}\ 3d-(d+1)(d+2)/4-a/2<0\quad\text{qui est vrai dès que } d\ge 9.
\end{aligned}$$

On applique maintenant la partie *régularité* du Lemme 2.1: on note z le r-uplet de $(\mathbb{P}^2)^r$ obtenu en spécialisant les l points $P_{3+s+t},\dots,P_{2+s+t+l}$ en des points génériques de L. On exploite la droite L en tenant compte de la remarque 2.3. Vérifions les hypothèses (1) à (4) de 2.1.

L'hypothèse (1) n'est autre que la condition (5) ci-dessus. La condition (2) est vide, car on exploite une courbe rationnelle. Puisque $\underline{d}.\underline{l} \geq 3$ (équation (iii)), l'entier l est supérieur ou égal à b. Il est donc possible de choisir b points $P_{s+t+3},\dots,P_{s+t+b}$ parmi ceux que l'on a spécialisés. C'est l'hypothèse (3) du Lemme 2.1 (avec la Remarque 2.3).

Il reste à montrer que $h^0(S_z, \mathscr{I}_{P^L_{3+s+t}\cup\cdots\cup P^L_{s+t+b}}(\underline{d}')) = 0$, où $\underline{d}' = (d-1; m_1-1, m_2-1, m_1,\dots,m_s, m_{3+s}-1,\dots,m_{2+s+t+l}-1, m_{3+s+t+l},\dots,m_r)$. Par récurrence, il suffit de vérifier les inégalités (i) et (ii).

Inégalité (i): Puisque m_1 et m_2 sont strictement positifs, $\underline{d}'.\underline{u} = 2(d-1)-(m_1-1)-(m_2-1) = 2d-m_1-m_2 = \underline{d}.\underline{u}$. L'inégalité est donc toujours vraie.

Inégalité (ii): Il s'agit de montrer que $\underline{d}'.\underline{l} - b \geq 9$, ce qui s'écrit:

$$
\begin{aligned}
&(d-1)-(m_1-1)-(m_2-1)-\sum_{i=3+s}^{2+s+t+l}(m_i-1)-b \geq 9\\
&\quad \Leftrightarrow_{(5)} \; -b+a+1+t+l-b \geq 9\\
&\quad \Leftarrow_{b\leq 2} \; t+l \geq 12.
\end{aligned}
$$

Mais, puisque $m_i \leq 3$, l'Éq. (5) implique: $3(t+l) \geq d-m_1-m_2-a \geq_{(a\leq 27, m_i\leq 3)} d-33$. Ainsi, $t+l$ est un entier supérieur ou égal à $(d-33)/3$, et l'inégalité est vraie dès que $d \geq 67$. □

Lemme 5.3 ([13, *Proposition* 4.1]).

Soient L une droite du plan et y le r-uplet générique de $L^t \times (\mathbb{P}^2)^r$. Soit $\underline{d} = (d; m_1,\dots,m_r)$ tel que $m_i \leq 3$ pour $1 \leq i \leq r$ et a un entier tel que $0 \leq a \leq \min(s,27)$. Si $d \geq 10$ et $d-m_1-\cdots-m_r-a \geq 0$, alors le système $\mathscr{I}_{P^L_1\cup\cdots\cup P^L_a}(\underline{d})$ est régulier.

Remarque. En réalité le lemme énoncé dans [13] n'autorise qu'un nombre $a \leq 2$ de points infiniment voisins. Mais, partant de $a \leq 27$, il suffit d'exploiter une fois la droite L grâce au lemme d'Horace différentiel 2.4 de [13] pour se ramener à la Proposition 4.1 de [13] avec $d \geq 9$.

5.2. La preuve proprement dite

Théorème 2. *Soient x le point générique de X et $\underline{d} = (d; m_1,\dots,m_r)$, où $1 \leq m_i \leq 3$ $(1 \leq i \leq r)$. Si $d \geq 317$ alors $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ est régulier et, s'il est non vide, $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ est géométrique irréductible et lisse, et sa projection sur le plan n'a que des singularités ordinaires.*

Preuve. On sait, d'après le Lemme 5.3, que $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ est régulier. Si $\chi(\underline{d}) \leq 0$, ce système est vide et le théorème est vrai. Si $\chi(\underline{d}) \geq 2$, il est possible de rajouter $\chi(\underline{d})-1$ points simples génériques dans $\mathbb{P}^2$ et de n'étudier que l'unique courbe de $\mathscr{L}_x(\underline{d})$ passant par ces points. On supposera donc que $\chi(\underline{d}) = 1$.

Par ailleurs, s'il y a plus de trois points affectés de multiplicité 1, il est possible d'effectuer une collision de ces trois points simples pour obtenir un point double. Si la courbe passant par ce point double est comme le prévoit le Théorème 2, on vérifie aisément que la courbe passant par les trois points simples de départ possède aussi les propriétés recherchées. On supposera donc que le nombre de points affectés de multiplicité 1 est inférieur ou égal à 2.

Considérons C la cubique rationnelle générique. Nous allons appliquer le Lemme 2.1 en distinguant deux cas:

S'il y a plus de d points doubles imposés:

Quitte à permuter les m_i, écrivons $\underline{d} = (d; m_1, 2^d, m_{2+d}, \ldots, m_r)$, où $m_1 \geq 2$ (il y a au plus deux m_i égaux à 1). Montrons qu'il existe un entier s $(0 \leq s \leq r-d-1)$ tel que:

$$-a{:=}3d - 2m_1 - 2d - \sum_{i=2+s}^{1+d+s} m_i + 1 \in [-2, 0]. \tag{6}$$

Puisque $1 \leq m_i \leq 3$, il suffit de vérifier que $3d - 2m_1 - 2d + 1 \geq 0$, ce qui est évident, et que

$$\begin{aligned} & 3d - 2m_1 - 2d - \sum_{i=2+d}^{r} m_i + 1 \leq 0 \\ & \quad \Leftarrow_{1 \leq m_i \leq 3} 3d - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2}\right) + 1 \leq 0 \\ & \quad \Leftrightarrow_{\chi(\underline{d})=1} 3d - \tfrac{1}{2}\left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1\right) + 1 \leq 0, \quad \text{ce qui est vrai pour } d \geq 9. \end{aligned}$$

Notons $y = (Q_1, \ldots, Q_r)$, le point générique de $Q_1 \times C^{d+s} \times (\mathbb{P}^2)^{r-d-s-1}$, où Q_1 est le nœud de la cubique C. Le r-uplet générique $x \in (\mathbb{P}^2)^r$ se spécialise en y. La transformée stricte de C sur S_y, $\tilde{C}$ est lisse, et sa classe est $\underline{c} = (3; 2, 1^{d+s}, 0^{r-d-s-1})$. Pour appliquer le Lemme 2.1, nous en vérifions les hypothèses (1) à (10):

La condition (1) n'est autre que la relation (6) donnée plus haut et la condition (2) est vide (C est rationnelle). Pour (3) et (4), on vérifie que $\mathscr{I}_{P_2^C \cup \cdots \cup P_{a+2}^C}(\underline{d} - \underline{c})$ est régulier. On applique le Lemme 5.1 dont la seule condition est:

$$\begin{aligned} & (\underline{d} - \underline{c}).\underline{c} - a - 1 \geq 140 \\ & \quad \Leftrightarrow 3d - 9 - 2(m_1 - 2) - d - \sum_{i=2+d}^{1+d+s} (m_i - 1) - a - 1 \geq 140 \\ & \quad \Leftrightarrow_{(6)} d + s - 7 - 2a \geq 140, \quad \text{ce qui est vrai dès que } d \geq 151. \end{aligned}$$

Il reste les parties "irréductibilité" et "lissité" du lemme d'Horace géométrique. L'hypothèse (5) est évidente (il n'y a pas de cubique passant par d points génériques), de même que la condition (7) (la variété X est lisse).

Pour les autres hypothèses, on vérifie que le système résiduel $\mathscr{L}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est *faiblement contraint* par les d points $P_2,\dots,P_{d+1}$. On peut alors appliquer 4.4. Soit Q, un point générique de C. Il faut d'abord vérifier que $\mathscr{I}_Q(\underline{d}-\underline{c})$ est régulier. En appliquant le Lemme 5.1, il suffit pour cela que $(\underline{d}-\underline{c}).\underline{c}-1\geq 140$, ce qui est vrai, au vu du calcul similaire effectué plus haut. De même, $\mathscr{I}((d-3)-1;m_1-2,m_2-1,\dots,m_{1+d+s}-1,m_{2+d+s},\dots,m_r)$ doit aussi être régulier. Là encore, on applique le Lemme 5.1 en vérifiant que:

$$(d-4)3-2(m_1-2)-\sum_{i=2+d}^{1+d+s}(m_i-1)\geq 140$$
$$\Leftrightarrow_{(6)}\ 2d+s-9-a\geq 140,\qquad \text{qui est vrai dès que } d\geq 76.$$

Ainsi, les hypothèses (6), (8), (9) et (10) sont vraies. Le lemme d'Horace géométrique montre alors que la courbe $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$ est bien géométriquement irréductible et lisse. En ce qui concerne les singularités ordinaires, on utilise simplement le Lemme 4.4 et la Remarque 2.4.

S'il y a moins de d points doubles imposés:

Soit l le nombre d'entiers m_i égaux à trois. Puisque'il y a moins de 2 points simples, et moins de d points doubles, la condition $\chi(\underline{d})=1$ conduit aisément à: $l\geq(d^2-3d+2)/12$. Nous écrirons $\underline{d}=(d;3^l,m_{l+1},\dots,m_r)$. Nous allons exploiter C deux fois de suite:

• Lors de la première exploitation, le nombre de points spécialisés sur C doit être choisi attentivement: pour vérifier l'hypothèse (9) de 2.1, nous allons devoir construire des répartitions symétriques. Ceci impose des contraintes arithmétiques importantes.

Ecrivons $d=9h+f$ où $0\leq f\leq 8$. Posons $s=d+\varepsilon$, où $-1\leq\varepsilon\leq 7$, est donné par le Tableau 1 (Section 5.3) en fonction de h et f. Soit $y=(Q_1,\dots,Q_r)$, le point générique de $Q_1\times C^s\times(\mathbb{P}^2)^{r-s-1}$, où Q_1 est le nœud de C. Le point x se spécialise en y. La classe de $\tilde{C}_y$ est $\underline{c}=(3;2,1^s,0^{r-s-1})$.

Appliquons le Lemme 2.1. La condition (1) est satisfaite puisque:

$$-a{:=}\underline{d}.\underline{c}+1=3d-2.3-3.(d+\varepsilon)+1=-5-3\varepsilon\in[-26,-2]. \tag{7}$$

La condition (2) est vide et, pour (3) et (4), on utilise les $a+1$ derniers points. Grâce au Lemme 5.1 l'hypothèse de régularité (4) est vraie dès que $(\underline{d}-\underline{c}).\underline{c}-a-1\geq 140$, c'est à dire: $3d-9-2-2(d+\varepsilon)-a-1\geq 140$. Ceci est vrai dès que $d\geq 192$. Comme dans le premier cas, les hypothèses (5) et (7) sont évidentes.

La condition (8) et la version affaiblie de l'hypothèse (9) (voir Proposition 2.5) sont démontrées dans la section suivante, Proposition 5.4. Pour obtenir ce résultat, on construit plusieurs répartitions symétriques, ce qui nécessite d'avoir $d\geq 317$.

Pour montrer que $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est géométriquement irréductible et lisse (conditions (8) et (10)), et qu'elle rencontre les diviseurs exceptionnels en des points distincts, on exploite une deuxième fois la cubique C à l'aide du lemme d'Horace géométrique.

• Considérons la classe $\underline{d}'=(d-3;2,2^s,m_{s+2},\dots,m_r)$. Il s'agit presque de $\underline{d}-\underline{c}$, mais l'on a augmenté la multiplicité affectée à Q_1, de 1 à 2. Puisque $a\geq 2$, la dimension de dim $\mathscr{L}_y(\underline{d}-\underline{c})$ est supérieure ou égale à 2 (Remarque 2.2). On voit alors aisément que si $\mathfrak{D}_y(\underline{d}')$ a les propriétés recherchées, il en sera de même de $\mathfrak{D}_y(\underline{d}-\underline{c})$. Ceci permet de ne pas faire apparaître une multiplicité -1 en Q_1 lorsqu'on exploite C une deuxième fois.

Soit t la partie entière de $(d-13-2\varepsilon)/3$. Puisque le nombre l de points triples est supérieur à $(d^2-3d+2)/12$, on voit que $l \geq t+s+1$. Les multiplicités $m_{s+2},\dots,m_{s+t+1}$ valent donc toutes 3.

Soit $z=(R_1,\dots,R_r)$ le point générique de $R_1 \times C^{s+t} \times (\mathbb{P}^2)^{r-s-t-1}$. Le point y se spécialise en z, et la classe de $\tilde{C}_z$ vaut $\underline{c}'=(3;2,1^{t+s},0^{r-s-t-1})$.

La condition d'ajustement (1), est vraie puisque:

$$-b{:=}(\underline{d}'.\underline{c}')+1=3(d-3)-4-2(d+\varepsilon)-3t \in [-3,0]. \tag{8}$$

L'hypothèse (2) est vide. Les $b+1$ points $R_{s+2},\dots,R_{s+b+2}$ permettent de vérifier les conditions (3) et (4). Il faut montrer que $\mathscr{I}_{R^C_{s+2}\cup\cdots\cup R^C_{s+b+2}}(\underline{d}'-\underline{c}')$ est régulier. D'après le Lemme 5.1, il suffit que $(\underline{d}'-\underline{c}').\underline{c}'-b-1 \geq 140$, c'est à dire $(d-6).3-4-(d+\varepsilon)-2t-b-1 \geq 140$. Ceci est vrai dès que $d \geq 131$.

L'hypothèse (5) est évidente, de même que (7), puisque $Q_1 \times C^s \times (\mathbb{P}^2)^{r-s-1}$ est lisse au point générique de $Q_1 \times C^{s+t} \times (\mathbb{P}^2)^{r-s-t-1}$. On remarque maintenant que le système $\mathscr{L}_z(\underline{d}'-\underline{c}')$ est faiblement contraint par les $s=(d+\varepsilon)$ points $P_2,\dots,P_{s+1}$. La Proposition 4.4 et le Lemme 5.1 permettent maintenant de conclure: Si Q est un point générique sur C, il suffit de vérifier que $\mathscr{I}_Q(\underline{d}'-\underline{c}')$ est régulier –ce qui est vrai puisque $(\underline{d}'-\underline{c}').\underline{c}'-1 \geq 140$– et que $\mathcal{O}(d-7,0,1^s,2^t,3^{r-s-t-1})$ est régulier –ce qui est vrai puisque $3(d-7)-s-2t \geq 3d-21-d-\varepsilon-2((d-6)/3) \geq_{d\geq 317} 140$–.

Ainsi, $\mathfrak{D}_y(\underline{d}')$ est géométriquement irréductible et lisse et $\mathfrak{D}_y(\underline{d}') \cup \tilde{C}_y$ rencontre chaque diviseur exceptionnel E_i en m_i points distincts. D'après 2.1 (et la Remarque 2.4), il en va de même pour $\mathfrak{D}_x(\underline{d})$. $\square$

5.3. Les répartitions symétriques de la preuve

Nous terminons ici la preuve du Théorème 2 en prouvant l'irréductibilité de l'intersection entre la cubique rationnelle et la courbe résiduelle (voir la section précédente). Pour cela, nous construisons de manière totalement explicite des répartitions symétriques sur la cubique.

Reprenons les notations de la section précédente: C est la cubique rationnelle générique, Q_1 est le nœud de C. Le point $y \in X$ est le point générique de $Q_1 \times C^s \times (\mathbb{P}^2)^{r-s-1}$ (où $s=d+\varepsilon$ est donné par le tableau 1) et $\underline{d}'=(d-3;1,2^s,3^{l-s-1},m_{l+s+1},\dots,m_r) \in \operatorname{Pic} S_y$. Nous souhaitons construire des répartitions symétriques en spécialisant y.

Ecrivons $d{=}9h{+}f$, où $0 \leq f \leq 8$. Considérons H_1, H_2 et H_3 trois courbes génériques de degré h. Soient ε et β, les entiers fournis par le Tableau 1. On définit un entier α de la manière suivante:

$$\alpha=\frac{1}{3}\left((d-3)h-2\beta-6h^2+1-\frac{(h-1)(h-2)}{2}\right). \tag{9}$$

Notons que le choix de β donne toujours une valeur entière pour α. Soit $z{=}(R_1,\dots,R_r) \in X$ un r-uplet de points tel que $R_1=Q_1$ est le nœud de C et, pour $1 \leq i,j,k \leq 3$

Tableau 1
Valeurs de ε et β en fonction de $d = 9h + f$ $(0 \le f \le 8)$

	$h \equiv 0$ [3]	$h \equiv 1$ [3]	$h \equiv 2$ [3]
$f = 0$	$\varepsilon{:=}-1;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}2;\ \beta{:=}5$	$\varepsilon{:=}2;\ \beta{:=}5$
$f = 1$	$\varepsilon{:=}4;\ \beta{:=}6$	$\varepsilon{:=}1;\ \beta{:=}4$	$\varepsilon{:=}4;\ \beta{:=}6$
$f = 2$	$\varepsilon{:=}0;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}0;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}6;\ \beta{:=}7$
$f = 3$	$\varepsilon{:=}5;\ \beta{:=}6$	$\varepsilon{:=}-1;\ \beta{:=}2$	$\varepsilon{:=}-1;\ \beta{:=}2$
$f = 4$	$\varepsilon{:=}1;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}7;\ \beta{:=}7$	$\varepsilon{:=}1;\ \beta{:=}3$
$f = 5$	$\varepsilon{:=}6;\ \beta{:=}6$	$\varepsilon{:=}6;\ \beta{:=}6$	$\varepsilon{:=}3;\ \beta{:=}4$
$f = 6$	$\varepsilon{:=}2;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}5;\ \beta{:=}5$	$\varepsilon{:=}5;\ \beta{:=}5$
$f = 7$	$\varepsilon{:=}7;\ \beta{:=}6$	$\varepsilon{:=}4;\ \beta{:=}4$	$\varepsilon{:=}7;\ \beta{:=}6$
$f = 8$	$\varepsilon{:=}3;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}3;\ \beta{:=}3$	$\varepsilon{:=}0;\ \beta{:=}1$

et i, j, k distincts: Les points $R_{s+(i-1)\alpha+2}, \dots, R_{s+1+i\alpha}$ sont libres sur H_i, les points $R_{s+3\alpha+(i-1)h^2+2}, \dots, R_{s+1+3\alpha+ih^2}$ sont en $H_j \cap H_k$, les points $R_{(i-1)\beta+2}, \dots, R_{1+3(\alpha+h^2)+i\beta}$ sont en $H_i \cap C$, les autres points sont définis par $R_i = Q_i$.

On vérifie aisément que, si $d \ge 317$, les points de $\mathbb{P}^2$ spécialisés sur les trois courbes sont tous affectés de la multiplicité 3. Il suffit de voir que $l \ge (d^2 - 3d + 2)/12 \ge 3\alpha + 3h^2$.

Proposition 5.4. *Si $d \ge 317$, la répartition $(z, \underline{d}')$ définie ci-dessus est une répartition symétrique. En conséquence, $\mathfrak{D}_y(\underline{d}')$ coupe $\tilde{C}_y$ transversalement, et le groupe $\widehat{\mathfrak{G}_y} := \widehat{\mathfrak{G}_y}(\underline{d}', C)$ agit transitivement.*

Preuve. Le point z est une spécialisation de y; $\widehat{\mathfrak{G}_z} := \widehat{\mathfrak{G}_z}(\underline{d}', C)$ est donc un sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{G}_y}$. Si l'on prouve que $(z, \underline{d})$ est une répartition symétrique, l'intersection de $\mathfrak{D}_z(\underline{d}')$ et $\tilde{C}_z$ est transverse et $\widehat{G_z}$ agit transitivement. Il en est de même en y.

La position des points $(R_1, \dots, R_r)$, est celle de la Proposition 3.9. Puisque $\alpha = \frac{1}{3}((d-3)h - 2\beta - 6h^2 + 1 - g)$, α est supérieur ou égal à $h^2 - h - 2\beta/3 - h^2/6 \ge (h-1)(h-2)/2$. Il suffit donc de vérifier les 3 Conditions de 3.9.

La condition (1) est clairement vraie: l'entier α a été défini en sorte que cette relation soit satisfaite. L'égalité (2) s'écrit:

$$\begin{aligned} &\underline{c}.(\underline{d}' - \underline{h}_1 - \underline{h}_2 - \underline{h}_3) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow 3(d - 3 - 3h) - 2 - 2(s - 3\beta) - 3\beta = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow_{(d=9h+f, s=d+\varepsilon)} f - 11 - 2\varepsilon + 3\beta = 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de ε et β données par le tableau vérifient bien cette relation.

Il reste à vérifier que $h^1(S_z, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{h}_1 - \underline{h}_2 - \underline{h}_3 - \underline{c})) = 0$. Pour cela, nous allons exploiter successivement H_1, H_2, H_3 et encore H_1. Nous vérifierons ensuite qu'il reste moins de $\chi(h) - 1$ points sur chaque courbe H_i. Ces points pourront donc être supposés génériques dans le plan. On appliquera alors le lemme de régularité 5.3.

Nous décrivons ci-dessous ces quatre spécialisations. A l'étape numéro i, on spécialise τ_i points du plan et δ_i points de C sur la courbe exploitée. Notons que, pour la classe $\underline{d} - \underline{h}_1 - \underline{h}_2 - \underline{h}_3 - \underline{c}$, tous les points de C sont affectés de la multiplicité 1. On peut donc choisir τ_i et δ_i en sorte que l'hypothèse d'ajustement du lemme d'Horace soit respectée *sans condition différentielle*; c'est à dire, $a=0$ dans le Lemme 2.1.

A chaque étape, il faut vérifier plusieurs conditions. En particulier, il y avoir plus de $(h-1)(h-2)/2$ points génériques sur la courbe exploitée (condition sur le genre). Il faut aussi montrer quelques inégalités sur le nombre de points en jeux. La condition qui impose $d \geq 317$ est l'inégalité montrant qu'il y a assez de points triples disponibles pour effectuer ces 4 spécialisations. Les autres conditions sont largement satisfaites lorsque $d \geq 317$, et nous ne les détaillerons pas.

Tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel Mapple. Le détail en est disponible auprès de l'auteur.

Etape 1: *on exploite* H_1. On pose $\delta_1 = 3h - \mu_1$ où $0 \leq \mu_1 \leq 2$. La congruence de μ_1 modulo 3 est choisie afin qu'en spécialisant un nombre *entier* τ_1 de points triples sur H_1, on puisse satisfaire l'équation d'ajustement (hypothèse (1) du Lemme 2.1, avec $a=0$). L'entier τ_1 est totalement déterminé par cette condition d'ajustement:

$$\tau_1 = \frac{11}{18}h^2 + \frac{hf}{9} - \frac{13}{6}h + \frac{4}{9}\beta + \frac{\mu_1}{3}.$$

Etape 2: *on exploite* H_2. On spécialise les τ_1 points libres de H_1, affectés de la multiplicité 2 à l'intersection de H_1 et H_2. Puisque $\tau_1 < h^2$ (vérification par le calcul), on peut encore spécialiser $h^2 - \tau_1$ points libres de H_1 parmi les α points affectés de la multiplicité 1 (là encore, on vérifie que $\alpha > h^2 - \tau_1$).

On pose ensuite $\delta_2 = 3h - \mu_2$ où $0 \leq \mu_2 \leq 2$. La congruence de μ_2 modulo 3 permet de définir un nombre entier τ_2 de points triples à spécialiser sur H_2. l'équation d'ajustement donne:

$$\tau_2 = \frac{2}{27}h^2 + \frac{2}{27}hf - \frac{13}{9}h + \frac{8}{27}\beta + \frac{\mu_1}{9} + \frac{\mu_2}{3}.$$

Etape 3: *on exploite* H_3. On spécialise les $\tau_2 + \alpha$ points libres de H_2, affectés de multiplicités 1 ou 2 à l'intersection de H_2 et H_3. On spécialise aussi les $\alpha - (h^2 - \tau_1)$ points libres restant sur H_1 et affectés de multiplicité 1 à l'intersection de H_1 et H_3.

On pose ensuite $\delta_3 = 3h - 24 - \mu_3$ où $0 \leq \mu_3 \leq 2$. Le nombre 24 constitue simplement une "marge" pour s'assurer qu'il reste bien assez de points libres sur C. La congruence de μ_3 modulo 3 permet de définir un nombre entier τ_3 de points triples à spécialiser sur H_3:

$$\tau_3 = \frac{11}{81}h^2 - \frac{16}{81}hf - \frac{4}{27}h + \frac{44}{81}\beta - \frac{\mu_1}{27} - \frac{2}{9}\mu_2 + \frac{\mu_3}{3} + 8.$$

Etape 4: *on exploite à nouveau* H_1. On spécialise les $\tau_3 + \alpha$ points libres de H_3, affectés de multiplicités 1 ou 2 à l'intersection de H_3 et H_1.

On pose $\delta_4 = \mu_4$ où $0 \leq \mu_4 \leq 2$. La congruence de μ_4 modulo 3 permet de définir l'entier τ_4:

$$\tau_4 = \frac{127}{486}h^2 + \frac{77}{243}hf - \frac{83}{162}h - \frac{70}{243}\beta - \frac{7}{81}\mu_1 + \frac{4}{27}\mu_2 - \frac{2}{9}\mu_3 - \frac{\mu_4}{3} - \frac{50}{9}.$$

Conclusion: Sur la courbe H_1, il reste τ_4 points libres et τ_3 points en $H_1 \cap H_3$. On vérifie que $\tau_3 + \tau_4 \leq \chi(\underline{h}_1) - 1 = h(h+3)/2$. Sur H_2, il reste τ_2 points en $H_2 \cap H_3$, et $\tau_2 \leq \chi(\underline{h}_2) - 1$. Sur H_3, il reste τ_2 points en $H_2 \cap H_3$ et τ_3 points en $H_1 \cap H_3$. On vérifie aussi que $\tau_2 + \tau_3 \leq \chi(\underline{h}_3) - 1$.

Ainsi, tous les points sur les courbes H_i peuvent être supposés génériques dans le plan. Il reste un système de degré $2h + f \geq 70$ avec quelques points sur C affectés de multiplicité 1. Sur C il y a exactement $s - 3\beta - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 24 - 3\beta + \varepsilon + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4$ points. Ce nombre est positif ou nul, et inférieur ou égal à 34. On peut faire dégénérer C en l'union d'une droite et d'une conique, spécialiser tous les points de C sur la droite, et appliquer le Lemme 5.3.

Pour finir, nous donnons la conditions pour qu'il y ait assez de points triples dans le plan. On sait qu'il y a au moins $(d^2 - 3d + 2)/12$ points triples au départ. Il faut donc vérifier que:

$$\begin{aligned}
&(d^2 - 3d + 2)/12 \geq s + 3\alpha + 3q^2 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4, \quad \text{c'est à dire}\\
&\frac{163}{972}h^2 + \frac{95}{486}hf + \frac{f^2}{12} - \frac{1009}{162}h - \frac{4f}{3}\\
&\quad + \frac{244}{243}\beta - \frac{8\mu_1}{81} - \frac{7\mu_2}{27} - \frac{\mu_3}{9} + \frac{\mu_4}{3} - \frac{16}{9} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ceci est vrai dès que $d = 9h + f \geq 317$. $\square$

References

[1] J. Alexander, A. Hirschowitz, An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points, Inventiones Math., to appear. 1997.

[2] E. Arbarallo, M. Cornalba, Footnotes to a paper of Benjamino Segre, Math. Ann. 256 (1981) 341–362.

[3] S. Bossini, Classification des courbes sur les surfaces rationnelles génériques, Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.

[4] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Masson, Paris, 1985.

[5] C. Ciliberto, R. Miranda, Degenerations of planar linear systems, J. Reine Angew. Math. (1998) 191–220.

[6] C. Ciliberto, R. Miranda, Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity, preprint math.AG/9804018, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[7] G.M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, Plane curves of minimal degree with prescribed singularities, Inventiones Math. 133 (3) (1998) 539–580.

[8] G.M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, Geometry of families of nodal curves on the blown-up projective plane, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1) (1998) 251–274.

[9] A. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique; V. Les schémas de Picard: théorèmes d'existence, Séminaire Bourbaki, exposé, Vol. 232, 1961–1962.

[10] J. Harris, Galois groups of enumerative problems, Duke Math. J. 46 (1979) 685–724.

[11] A. Hirschowitz, Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques, J. Reine Angew. Math. 397 (1989) 208–213.

[12] T. Mignon, Courbes lisses sur les surfaces rationnelles génériques: un lemme d'Horace géométrique, Annales de l'Institut Fourier, to appear.

[13] T. Mignon, Systèmes de courbes planes à singularités imposées: le cas des multiplicités inférieures ou égales à quatre, J. Pure Appl. Algebra 151 (2) (2000) 173–195.

[14] M. Nagata, On rational surfaces II, Mem. Coll. Sci. Kyoto, XXXIII, Mathematics 33 (2) (1960) 271–293.

[15] A. Nobile, On families of singular plane projective curves, Ann. di Mat. Pura Appl. (IV) CXXXVIII 1984 (341–378).

[16] C. Walter, Curves in $\mathbf{P}^3$ with expected monad, J. Algebraic Geometry 4 (1995) 301–320.

[17] G. Xu, Ample line bundles on smooth surfaces, J. Reine Angew. Math. 107 (1995) 99–209.